Bewijstheorie *vs* semantiek.

De regels van de bewijstheorie zijn instructies die ons toelaten bewijzen te construeren. Dat ze niet steeds veel inzicht verschaffen in de betekenis van de logische constanten blijkt onder meer uit het volgende voorbeeld.

Zij, voor elke schematische letter voor zinnen A, N_A een functie zodat $N_A(B)$ het aantal keer is dat A voorkomt in B en $N_A(B_1, \ldots, B_n) = N_A(B_1) + \ldots + N_A(B_n)$. We bekijken nu een taalschema waarin slechts één logische constante voorkomt, namelijk het binair connectief $\sharp$, dat gekarakteriseerd is door de volgende meta-regel:

D$\sharp$ Als, voor alle $A \in \mathcal{Z}$, $N_A(B_1, \ldots, B_n)$ en $N_A(C)$ beide even of beide oneven zijn,[1] dan $B_1, \ldots, B_n \;/\; C$.

Iedereen kan gemakkelijk genoeg in deze taal bewijzen maken. Hier is een voorbeeld:

1	$(p\sharp(q\sharp r))\sharp r$	Prem	
2	$p\sharp r$	Prem	
3	s	Prem	
4	$p\sharp(s\sharp(q\sharp p))$	Prem	$\triangle s\sharp r$
5	$s\sharp r$	1, 2, 4; D$\sharp$	

Om dit bewijs te vinden volstaat het onder de premissen formules te zoeken zodat zowel r als s in al deze formules samen een oneven aantal keer voorkomen en alle andere schematische letters in al deze formules samen een even aantal keer voorkomen.

De bewijsheuristiek voor dit systeem is dus bijzonder eenvoudig. Bovendien is er een eenvoudige beslissingsmethode: $\Gamma \vdash A$ alss er $B_1, \ldots, B_n \in \Gamma$ zijn zodat de schematische letters die een oneven aantal keer voorkomen in A ook een oneven aantal keer voorkomen in $B_1, \ldots, B_n$ samen en alle andere schematische letters een even aantal keer voorkomen in $B_1, \ldots, B_n$ samen.

Veel lezers zullen echter enige tijd nodig hebben om uit te vinden wat $\sharp$ betekent. In dit opzicht is de semantiek veel eenvoudiger. Daarin blijkt namelijk dat $v(A\sharp B) = 1$ alss $v(A) = v(B)$. Met andere woorden, $\sharp$ is niets anders dan de materiële equivalentie.

Oefening. Zij v een functie zodat $v : \mathcal{W} \mapsto \{0, 1\}$. Toon aan dat $v(A\sharp B) = 1$ alss $v(A) = v(B)$. Hint: toon eerst aan dat $\emptyset \models A\sharp A$ en dus ook $A \models A\sharp A$; gebruik daarna $B \models (A\sharp A)\sharp B$ en $(A\sharp A)\sharp B \vdash B$.

[1] Let erop dat een schematische letter die niet voorkomt een even aantal keer voorkomt, namelijk nul keer. Men kan D$\sharp$ eenvoudiger uitdrukken met de modulo-functie: $B_1, \ldots, B_n \;/\; C$ alss, voor alle $A \in \mathcal{Z}$, $N_A(B_1, \ldots, B_n) \bmod 2 = N_A(C) \bmod 2$.