Mathesis 1924 (3)

et par suite

$$P\,(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 S_1 S_2)\ \bar{\wedge}\ (\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4\sigma_1\sigma_2).$$

Dans cette projectivité les éléments homologues se coupent en des points A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, S_1, S_2 d'une cubique gauche passant par P. Mais si le point P est dans le plan σ_1 la génératrice PS_1 du cône $P\,(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 S_1 S_2)$ est dans son plan homologue σ_1 ; la cubique gauche se décompose et les cinq points A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, S_2 sont situés sur une conique qui s'appuie sur PS_1.

Remarques I. Si le point S et la droite *s* sont pôle et polaire relativement au cercle imaginaire à l'infini, on retrouve le théorème de M. Goormaghtigh (M, 1923-409) complété par la détermination des plans σ_1, σ_2 indépendants du plan Δ.

II. *La droite* s *étant donnée, le lieu des points* S *tels que les plans* σ_1, σ_2 *coïncident est la surface du quatrième ordre engendrée par les coniques du complexe* $(A_1A_2A_3A_4, s)$ *situées dans les plans du faisceau* (s).

III. *Si le plan* Δ *tourne autour de la droite* s, *le plan* $A'_1A'_2A'_3A'_4$ *décrit un faisceau.*

Car la droite PS coupe les plans Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 aux points P_1, P_2, P_3, P_4 et les points A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 décrivent respectivement sur les droites A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3, A_4P_4 des ponctuelles projectives. L'enveloppe du plan $A'_1A'_2A'_3A'_4S_2$ est un cône de seconde classe tangent aux plans $S_2A_1P_1$, $S_2A_2P_2$, $S_2A_3P_3$, $S_2A_4P_4$. Ces plans forment un faisceau (*s*) et le cône se décompose; le plan $A'_1A'_2A'_3A'_4$ décrit donc un faisceau ; l'axe passe par le point S_2 et coupe la droite SP. Ce dernier point se vérifie en considérant la position *sS* du plan Δ.

APOLLONIUS DE PERGE.

A PROPOS DE LA PREMIÈRE TRADUCTION EN LANGUE FRANÇAISE DE SON TRAITÉ DES « CONIQUES » (1),

par M. H. Bosmans, S. J.

Apollonius naquit à Perge en Pamphylie et vécut au déclin du troisième et au début du second siècle avant Jésus-Christ. Euclide le précède donc d'environ 75 ans, et Archimède est presque son contemporain, ne lui étant qu'un peu antérieur. Il nous importe surtout de remarquer que les travaux d'Archimède sur les Coniques ont certainement été écrits avant ceux d'Apollonius.

Peu de noms sont restés aussi fameux parmi ceux des savants de l'Hellade que celui du géomètre de Perge. Il doit surtout cette célébrité à son traité des *Coniques*, et il la mérite pleinement. Mais, par un phénomène qui n'est pas isolé dans l'histoire des mathématiques, il faut reconnaitre que son grand ouvrage est en réalité aussi peu lu qu'il est réputé. Si on l'admire, c'est de confiance et sur l'autorité d'autrui. La cause en est dans la difficulté qu'on avait de s'en procurer une version satisfaisante. Elle faisait jusqu'ici complètement défaut en langue moderne. On avait, il est vrai, de bonnes analyses des *Coniques*, parmi lesquelles il faut signaler surtout celle qu'Housel donna en 1858 dans le *Journal de Liouville.* (2) Mais une traduction proprement dite nous manquait, car la version allemande de Balsam (3) et surtout la version anglaise de Heath (4), œuvres très savantes d'ailleurs et très méritoires, sont plutôt des adaptations en notations modernes que des traductions dans la rigueur du mot. Ce genre de transposition défigure les géomètres grecs au point de leur enlever leur caractère. Un exemple fera comprendre ma pensée.

---

(1) *Les Coniques d'*Apollonius *de Perge. Œuvres traduites pour la première fois du grec en français. Avec une Introduction et des Notes, Par* Paul Ver Eecke, *Ingénieur des mines. (A. I Lg.), Inspecteur général du travail. Ouvrage publié sous les auspices de la Fondation Universitaire de Belgique.* Bruges, Desclée de Brouwer, 1924. Volume grand in-8°, d'une exécution magnifique, avec plusieurs centaines de figures et un frontispice hors texte.

(2) 2e sér. t. III, pp. 153-192.

(3) Apollonius *von Perga sieben Bücher über Kegelschnitte.* Berlin Georg Reiner, 1861.

(4) Apollonius *of Perga treatise on conic section.* Cambridge, University press, 1890.

Quand, au premier livre de sa *Géométrie*, DESCARTES se propose de résoudre l'équation du second degré

$$x^2 + px = q^2,$$

dans laquelle p est essentiellement positif, il suppose tacitement qu'elle est écrite comme suit,

$$x(x + p) = q^2,$$

puis, fidèle aux méthodes anciennes, il fait le raisonnement que voici :

Décrivons une circonférence de rayon $\frac{1}{2}p$; par un point pris sur la circonférence, menons une tangente d'une longueur égale à q ; joignons le point de contact et l'extrémité de la tangente au centre du cercle, puis, prolongeons l'hypoténuse du triangle rectangle ainsi formé jusqu'à sa deuxième intersection avec la circonférence. Si nous nommons x le segment extérieur de la sécante, le sécante entière pourra se représenter par $x + p$. Or, d'une part, un théorème de géométrie élémentaire nous donne la relation

$$x(x + p) = q^2 ;$$

d'autre part, un coup d'œil jeté sur la figure montre que l'inconnue x est égale à l'hypoténuse du triangle rectangle moins le rayon. DESCARTES en déduit que

$$x = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q^2} - \frac{1}{2}p.$$

Quant à l'application de cette solution aux mises en nombres, elle est toute différente des anciens aux modernes. Un géomètre grec voyait les calculs à effectuer en jetant les yeux sur la figure ou en se la rappelant. Un géomètre moderne les lit dans les lettres de la formule et les signes algébriques qui les affectent.

Les deux méthodes conduisent à la même série d'opérations arithmétiques, mais qui ne voit que les suggestions qu'elles éveillent sont très différentes ; que ce qui parait complication et détour dans l'une, est au contraire la voie commode et naturelle dans l'autre. Précisons. Quand on résout l'équation du second degré géométriquement, comme DESCARTES, rien ne décèle la racine négative donnée par le second signe du radical ; aussi, DESCARTES n'en parle-t-il pas. Mais, quand on résout l'équation algébriquement, en complétant, comme nous le faisons, le carré du premier nombre, on éprouve, à tort, un mouvement de surprise en voyant que les anciens ont négligé le double signe (5).

Pour bien connaître l'esprit des mathématiques grecques, il faut donc soigneusement conserver leur caractère géométrique et leurs démonstrations graphiques. Ce serait sans doute une erreur de vouloir de nos jours y revenir ; mais elles restent des modèles de logique et de rigueur pleins d'un charme archaïque, souvent instructif et dont on peut profiter.

---

(5) En représentant par x la sécante entière, sa partie extérieure vaut $x - p$, et DESCARTES obtient ainsi la racine positive de l'équation

$$q^2 = x(x - p) = x^2 - px.$$

Pour déterminer les deux racines positives de l'équation

$$q^2 = px - x^2 = x(p - x),$$

il opère de la manière suivante.

Soit une demi-circonférence décrite sur le diamètre p. Par l'une des extrémités du diamètre, menons une tangente égale à q. Par l'extrémité de cette tangente, menons une sécante parallèle au diamètre.

Que nous représentions par x soit la sécante entière soit sa partie extérieure, dans les deux cas, le second segment vaut $p - x$ et nous aurons cette fois

$$q^2 = x(p - x) = px - x^2 .$$

Si du centre du cercle nous abaissons maintenant une perpendiculaire sur la sécante, et si nous joignons en outre le centre à l'un des points d'intersection de la circonférence et de la sécante, nous formerons un triangle rectangle dont le côté situé sur la sécante vaut $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2}$. Par conséquent, en jetant un coup d'œil sur la figure, on voit que les deux racines de l'équation ont respectivement pour valeur

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2} \quad \text{et} \quad x = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2} .$$

Reste la quatrième et dernière forme de l'équation du second degré

$$x^2 + px + q^2 = 0,$$

mais elle n'a aucune racine positive et DESCARTES ne s'en occupe pas.

Guidé par ces considérations, M. PAUL VER EECKE s'est imposé dans sa traduction des *Coniques* la règle qu'il avait suivie dans sa traduction des *Œuvres d'*ARCHIMÈDE (6) : suivre le texte original d'aussi près que possible, sans jamais faire à l'élégance le sacrifice de la fidélité de l'expression employée par l'auteur ; mais multiplier sans compter les éclaircissements en notations modernes dans les notes du bas des pages. La règle est bonne, et le succès obtenu par l'ARCHIMÈDE de M. VER EECKE le prouve.

Un mot maintenant du traité des *Coniques* lui-même.

Dans une lettre préface à l'historien des mathématiques EUDÈME, par laquelle il lui annonce l'envoi du premier livre, APOLLONIUS informe son correspondant, que l'ouvrage complet comprendra huit livres, divisés en deux groupes de caractère différent.

Les quatre premiers livres, dit-il, composent les *Éléments des coniques.* La matière de ces *Éléments* n'était pas neuve. Elle avait fait l'objet d'importants travaux antérieurs, parmi lesquels il faut rappeler ceux d'ARISTÉE et d'EUCLIDE qui sont malheureusement perdus aujourd'hui. Ils avaient pour but final le problème de l'intersection de deux coniques, problème d'une importance primordiale pour les Grecs, car il leur tenait lieu de haute algèbre.

En effet, quand un problème conduisait à une équation du premier ou du second degré, les Hellènes disaient qu'il était *plan* c'est-à-dire, que la figure-formule de solution pouvait se construire à l'aide des deux *lieux plans*, nous disons aujourd'hui par la règle et le compas. EUCLIDE, on le sait, a fait des figures-formules de solution de l'équation du second degré l'objet principal du second livre de ses *Éléments*. Il faut y ajouter les propositions 27-30 du livre VI. (7)

Mais la trisection de l'angle, la duplication du cube et d'autres problèmes en grand nombre donnaient lieu à des équations du troisième et du quatrième degré. Les Grecs disaient alors que le problème devenait *solide*, parce qu'il se résolvait au moyen de l'intersection de deux *lieux solides*, autrement dit de deux *Coniques*. Ces courbes, tout en étant planes, se nommaient *lieux solides*, parce qu'elles se définissaient à l'aide d'un solide, le cône.

Par leur perfection, les *Éléments des Coniques* d'APOLLONIUS firent bientôt oublier les ouvrages similaires plus anciens. Ils s'employaient seuls dans l'enseignement supérieur ; et c'est probablement la circonstance d'avoir été longtemps chez les anciens le manuel classique en vogue, qui nous vaut de les posséder encore en grec.

(6) J'en ai rendu compte ici même en 1922, pp. 24-27.

(7) Voir sur ce sujet : ZEUTHEN. *Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge*, traduite par J. MASCART, Paris, Gauthier-Villars, 1902, pp. 34-43.

Les quatre derniers livres sont des travaux originaux d'APOLLONIUS ; nous dirions aujourd'hui des Mémoires. Le huitième livre est perdu, sans qu'on ait le moindre espoir de le retrouver jamais. Mais les livres V-VII nous ont été conservés dans des versions arabes. On en a publié diverses traductions latines, dont celle que l'astronome HALLEY donna en 1710, à Oxford, est de loin la meilleure (8). Le livre V s'occupe de certaines questions de maxima et de minima. Le livre VI a pour objet la similitude des coniques. Quant aux livres VII et VIII, APOLLONIUS nous apprend qu'ils traitent la même matière ; que le livre VII en établit les théorèmes, et que le livre VIII résout les problèmes auxquels ces théorèmes s'appliquent. Or, les principaux théorèmes démontrés dans le livre VII, sont les fameux théorèmes relatifs aux carrés et aux parallélogrammes construits sur deux diamètres conjugués d'une ellipse ou d'une hyperbole, qui portent encore le nom de théorèmes d'APOLLONIUS.

HALLEY en a conclu, avec assez de raison, semble-t-il, que le huitième livre avait surtout pour but le problème suivant :

Étant donnée une ellipse ou une hyperbole par deux diamètres conjugués et leur angle ; étant données en outre certaines relations entre deux autres diamètres conjugués ; trouver ces derniers en grandeur et en position (9).

En appliquant cette idée, l'astronome anglais a essayé une reconstitution du huitième livre, en soi très ingénieuse, mais qui reste cependant tout entière du domaine de la conjecture. Ainsi, HOUSEL observe, avec à-propos, qu'HALLEY oublie le problème suivant, qui ne pouvait pas avoir échappé à l'œil perspicace d'APOLLONIUS.

Une ellipse ou une hyperbole étant donnée par deux diamètres conjugués et leur angle, déterminer les axes en grandeur et en direction.

APOLLONIUS a beaucoup écrit, mais la plupart de ses ouvrages ont péri. Nous connaissons néanmoins le contenu de plusieurs d'entre eux par les analyses que PAPPUS en a données dans ses *Collections mathématiques*. Il faut en nommer au moins un, parce qu'il a exceptionnellement échappé au désastre général. C'est le traité de la *Section*

(8) APOLLONII PERGAEI *Conicorum Libri octo et Sereni Antissensis libri duo.* Oxonii, E theatre Scheldoniano. An. Dom. MDCCX. (Univ. de Gand).
M. VER EECKE s'est servi de cette édition pour traduire les livres V-VII. L'édition de HALLEY est la première qui ait donné le texte grec des *Coniques.* Mais HEIBERG en a publié depuis un texte critique beaucoup meilleur dans ses APOLLONII PERGAEI *quae graece exstant.* Leipzig, Teubner, 1890-1893.

(9) HALLEY ne formule pas lui-même le problème en ces termes, mais je crois qu'ils résument bien l'idée de sa restitution.

de Raison [10]. L'auteur y traite dans tous les cas possibles le problème suivant, que j'énonce en langage moderne :

Dans un plan, on donne deux droites et un point O. On prend un point A sur la première droite et un point B sur la seconde. On demande de mener par O une troisième droite rencontrant la première en M, la seconde en N, et telle que

$$\frac{AM}{BN} = k,$$

k étant une constante donnée. Ce traité peut évidemment être regardé comme une application des *Coniques*.

La version des *Coniques* de M. VER EECKE est précédée d'une savante Introduction, dont je me contente d'indiquer les chapitres. 1. Biographie d'APOLLONIUS. 2. Analyse de ses *Coniques*. 3. Les autres écrits d'APOLLONIUS. 4. Bibliographie des *Coniques* D'APOLLONIUS.

SUR LES SPIRALES SINUSOIDES OSCULANTES,

par M. R. GOORMAGHTIGH.

Les théorèmes et problèmes auxquels donnent lieu les questions récentes 2120 et 2189 de MM. P. DE LEPINEY et R. DEAUX (M, 1922-431, 1923-272, 448) et qui sont relatifs aux hyperboles équilatères ayant un contact quartiponctuel avec une conique, admettent une généralisation intéressante, obtenue en considérant les spirales sinusoïdes d'indices n ayant un contact quartiponctuel avec une courbe de CESÀRO de même indice.

Nous croyons utile de rappeler d'abord quelques définitions.

Une *courbe de* CESÀRO d'indice n est une courbe telle que ses cercles osculateurs, dilatés, par rapport aux points de contact,

---

(10) APOLLONII PERGAEI *de Sectione Rationis Libri duo ex antiquo MSto. latine versi. Ejusdem de Sectione Spatii Libri duo restituti... Opera et studio* EDMUNDI HALLEY.. Oxonii, E theatre Scheldoniano. Anno MDCCVI. (Bibl, Roy. de Belg.) Comme le titre le dit, le traité de la *Section de l'espace* est une reconstitution de HALLEY. Les données du problème étaient les mêmes que dans celui de la *Section de Raison*, mais les segments devaient cette fois vérifier la relation

$$AM.BN = k^2 .$$

dans le rapport constant $\frac{1}{2}(n+1)$, soient orthogonaux à un cercle fixe appelé *cercle directeur* et dont le centre est le *pôle* de la courbe.

Les courbes de CESÀRO comprennent plusieurs classes de courbes remarquables : les *cercles*, les *cycloïdales*, les *coniques*, qui s'obtiennent lorsque n vaut respectivement 1, 0, ou -2, les *spirales sinusoïdes* qui correspondent au cas où le cercle directeur se réduit à un point, les *courbes de* RIBAUCOUR qui sont des courbes de CESÀRO dont le cercle directeur a un rayon infini et devient une droite appelée *directrice*.

Soient M un point d'une courbe de CESÀRO d'indice n, C le centre de courbure correspondant, C_1 le centre de courbure de la développée en C ; une propriété caractéristique des courbes de CESÀRO consiste alors en ce que le rayon vecteur OM mené du pôle au point M divise CC_1 dans un rapport constant, par un point R tel que $CC_1 : CR = (1-n) : (1+n)$.

1. Appelons maintenant M un point d'une courbe quelconque (M), C le centre de courbure de (M) en M, C_1 celui de la développée en C, O le pôle de la spirale sinusoïde (S) d'indice n qui a avec (M) un contact quartiponctuel en M. Le contact des courbes (M) et (S) étant du troisième ordre, leurs deux premiers centres de courbure C et C_1 sont les mêmes pour les deux courbes ; dès lors, la perpendiculaire élevée en O sur MO rencontre MC en un point N tel que $CN = n.MC$. Par conséquent, le milieu P de MN est tel que $CP : PM = (1-n) : (1+n)$, c'est-à-dire que P est le centre du cercle (Γ) obtenu en dilatant, dans le rapport $\frac{1}{2}(n+1)$, le cercle osculateur de (M) en M.

Cela posé, envisageons le lieu (P) du point P quand M se déplace sur (M). Ce point P divisant MC dans un rapport constant, la normale en P à (P) rencontrera CC_1 en un point Q qui divise CC_1 dans le même rapport constant ; on aura $C_1Q : QC = (1-n) : (1+n)$. Il suffit d'appliquer au cas de la spirale sinusoïde (S) la propriété générale des courbes de CESÀRO rappelée ci-dessus, pour établir que le rayon vecteur OM de (S) est parallèle à la normale PQ à la courbe (P). Comme le point O appartient à (Γ), il n'est autre que le symétrique de M par rapport à la tangente à (P) au point P. Or, de ce que les intersections