S2, 20, 1901

et vérifiées d'une façon très approchée en ce qui concerne des systèmes presque isolés. D'autre part, ce sont des postulats applicables à l'ensemble de l'univers et regardés comme rigoureusement vrais. Si ces postulats possèdent une généralité et une certitude qui faisaient défaut aux vérités expérimentales d'où ils sont tirés, c'est qu'ils se réduisent en dernière analyse à une simple convention que nous avons le droit de faire, parce que nous sommes certains d'avance qu'aucune expérience ne viendra la contredire. »

Nous ne croyons pas que cette distinction soit très philosophique. Du moment qu'on reconnaît que les principes de la mécanique sont établis expérimentalement comme approximativement applicables aux systèmes à peu près isolés, leur formule absolue, qui n'est que la limite vers laquelle tendent les constatations expérimentales, relève de celles-ci et pourrait être modifiée par la découverte de nouveaux phénomènes. Pour échapper à cette conclusion, il faut saper par la base la valeur de toutes les vérifications.

A cette inconséquence, on reconnaît en M. Poincaré un simple précurseur de M. Le Roy : à celui-ci revient le titre de fondateur du nouveau positivisme.

Comme impression d'ensemble, le tome III de la Bibliothèque du Congrès laisse celle d'un double mouvement, l'un qui se résume précisément dans le nouveau positivisme, l'autre qui poursuit la réduction de la logique à des formes algorithmiques et qui, en même temps, s'efforce de purger la géométrie de toute forme spatiale en la réduisant à un système purement logique.

Georges Lechalas.

VARIÉTÉS

I

LA TRIGONOMÉTRIE DE TYCHO BRAHÉ (1)

Voici quinze ans écoulés depuis que cet ouvrage a paru ! Le grand nom de Tycho Brahé, le trois centième anniversaire de sa mort, l'intérêt s'attachant aux manuels élémentaires composés par des hommes de génie, tous ces motifs me le persuadent, une étude de la trigonométrie de Tycho Brahé ne manque cependant pas d'opportunité. Aussi bien n'est-elle pas connue du grand public savant comme elle mériterait de l'être.

Présentons-la d'abord au lecteur.

Elle est écrite en latin. C'est l'usage du temps ; et l'ennemi mortel de Tycho, Ursus Dithmarsus, Nicolas Reimers l'Ours de Dithmarsch en Holstein, a beau lui dire brutalement qu'il n'est qu'un gamin parfaitement ignorant de cette langue, on s'étonnerait de la voir rédigée en danois ou en allemand (2).

Inutile de s'attendre à y rencontrer un essai quelconque de notation soit algébrique soit trigonométrique, ce serait tout aussi contraire à l'usage du temps.

Elle n'était pas destinée à l'impression. Aussi la phrase de

(1) *Tychonis Brahe Triangulorum planorum et sphaericorum praxis arithmetica.* Qua maximus eorum, praesertim in astronomicis, usus compendiose explicatur. Nunc primum edidit Dr F. J. Studnicka, C. R., prof. math. publ. ord. universitatis litterarum Bohem. etc. etc. Prague, ex officina polygraphica Ios. Farsky. — Sumptibus editoris 1896.

(2) *Nicolai Raimari Vrsi Dithmarsi S. S. Rom. Caes. Mtis. Mathematici De Astronomicis Hypothesibvs sev Systemate mvndano, Tractatvs Astronomicus et Cosmographicus... Pragae Bohemiorvm apvd avthorem... MDXCVII.* — Voir la longue satire intitulée : " In novam grammaticam meorum Zoïlorum ; „ pp. Bvo. (Biv) ro.

l'auteur est souvent incomplète ou incorrecte, renfermant de véritables omissions ou de très singulières fautes de plume. En guise de démonstration on n'y trouve que quelques figures sans aucune explication auxiliaire.

Avouons-le de prime abord et sans détours, ces négligences ne sont pas de nature à la rendre toujours aisée à lire, ni facile à comprendre.

Voilà pour le fond.

Quant à la forme, le volume de M. Studnicka n'est pas banal. C'est la reproduction par la photolithographie du manuscrit original. Celui-ci appartient à la Bibliothèque de l'Université de Prague, où il est relié avec un imprimé in-4° des plus rares, le petit *Canon doctrinae triangulorum* de Rheticus. L'écriture du manuscrit, l' " ex bibliotheca Tychoniana „ inscrit à la main sur une des pages du *Canon*, la parfaite conservation de la reliure, tout le démontre : on a bien affaire à une pièce authentique. M. Dreyer seul, dans sa biographie de Tycho Brahé, a cherché, mais en vain, à le révoquer en doute (1).

Si M. Studnicka a eu recours à la photolithographie, dit-il dans la préface, c'est par respect et vénération pour les écrits de Tycho. Je le veux bien, mais il nous est cependant permis de le remarquer, ce parti lui rendait à certains points de vue l'exécution de son projet beaucoup moins difficile. M. Studnicka n'ajoute au texte ni notes, ni commentaires. Or, je viens de le dire, nous ne sommes pas en présence d'un traité achevé mais d'un brouillon. L'auteur partage un faible avec plus d'un homme illustre, il est sujet aux distractions et aux fautes de plume. Entrevoit-on combien il eût été malaisé de nous donner un texte imprimé ? Sans doute grâce à nos méthodes, grâce surtout à la supériorité de nos notations, nous arrivons aisément à résoudre les problèmes de trigonométrie aussi bien et mieux même que Tycho. Mais là n'est pas la difficulté. Un éditeur, si excellent soit-il, n'est pas Tycho Brahé, et il s'agit pour lui de deviner ce que Tycho eût écrit s'il avait corrigé son travail, et comment il l'eût écrit.

L'idée de M. Studnicka pour être un peu imposée, n'en est pas moins excellente. Elle nous vaut un petit chef-d'œuvre de typo-

(1) *Tycho Brahe... by J. L. Dreyer, Ph. D., F. R. A. S...* Edinburg, Adam and Charles Black, 1890, p. 362 en note. Voyez aussi : *Prager Tychoniana*, gesammelt von Prof. Dr F. J. Studnicka, K. K. Hofrath. Prag, Verlag der kön Böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, 1901 ; p. 23.

graphie. Elle nous met en outre à même de faire sur Tycho Brahé quelques très curieuses observations psychologiques, qu'un texte imprimé et plus ou moins corrigé ne nous eût pas permises.

A tout point de vue, il faut nous en féliciter.

Pour terminer la description de l'édition de M. Studnicka, disons enfin que le manuscrit de Tycho est formé de 20 feuillets, soit 40 pages, mesurant 20 centimètres de large sur 24 de hauteur. Plusieurs pages sont blanches, d'autres renferment à peine quelques mots, les plus remplies une vingtaine de lignes. L'écriture est grande, large et fort belle.

Dès le titre nous nous heurtons à une difficulté. Il porte deux dates, l'une et l'autre de l'écriture de Tycho : les calendes de janvier 1591, et le 13 des calendes de décembre 1595 (1). Quelle est celle ajoutée après coup ?

M. Studnicka n'ayant joint à son édition ni notes ni éclaircissements, le champ a commencé par être librement ouvert aux conjectures. L'aspect de l'encre, s'il avait été possible de l'examiner, eût probablement levé les doutes. Mais la photolithographie ne reproduit pas les couleurs et confond les teintes ; elle ne permet pas de conclure. Il fallait de toute nécessité recourir au manuscrit lui-même, et personne n'était plus désigné pour le faire que M. Studnicka. Il vient, il y a quelques mois à peine, de nous donner son avis. Il n'y a pas de doute possible, dit-il dans ses *Prager Tychoniana* (2), la trigonométrie de Tycho a été écrite en 1591.

Loin de trouver à objecter à cette conclusion, on devait la prévoir. Le *Carteggio inedito di Ticone Brahe.... con Giovanni Antonio Magini* publié par Favaro contient entre autres une lettre de Gellius Sascerides à Magini, datée du 1er février 1591, et prouvant péremptoirement qu'alors déjà la trigonométrie de Tycho Brahé était écrite (3).

Sascerides y transcrit un long passage d'une lettre de Tycho consacrée pour la plus grande partie à sa trigonométrie. Tycho y désigne les propositions, ses " Dogmata „ pour parler son langage, par leurs numéros d'ordre. Chose bien digne d'attention,

(1) 1er janv. 1591, 19 nov. 1595.
(2) P. 23.
(3) Bologna, Nicola Zanichelli, 1886 ; pp. 192-205.

la concordance de ces numéros avec ceux du manuscrit de Prague est parfaite.

Arrêtons-nous un instant, si on le veut bien, à cette lettre de Sascerides; car la trigonométrie de Tycho Brahé offre parfois, comme je le disais ci-dessus, d'intéressants sujets d'études psychologiques, et cette correspondance de Sascerides et de Magini nous fournit dès maintenant l'occasion d'en faire une.

Tycho Brahé, je ne dois pas l'apprendre au lecteur, n'était pas seulement le premier astronome de son temps, c'était encore un très grand seigneur. Dans son île d'Huënne, il menait, à l'observatoire d'Uranibourg, un train plus que princier, presque royal. En 1591 les revers et les malheurs n'étaient pas encore venus assombrir son existence, et rien mieux que sa correspondance ne met en relief la situation hors pair dont il jouissait alors (1).

A l'exception de son excellent et illustrissime ami le landgrave astronome Guillaume IV de Hesse, les savants en relation épistolaire avec lui ont presque tous le sentiment de la supériorité de sa position sociale, et sont doublement honorés quand ils ont pu attirer son attention.

Tycho tenait son rang avec aisance et dignité. Ses jugements louangeurs ou défavorables étaient des oracles faisant loi ; ils établissaient ou perdaient la réputation d'un homme. C'était une bonne fortune d'avoir obtenu son approbation. Il était en général généreux, encourageant, bienveillant ; mais pas toujours inaccessible à la flatterie et ce faible ne passait pas inaperçu. Il en résultait que sa petite cour de savants était assez encline à lui faire hommage non seulement de ses véritables découvertes d'ordinaire très réelles, mais d'autres encore où il n'était pour rien du tout. La distraction et la vanité du Maître en fournissaient parfois d'amusantes occasions.

Quand il se brouillait avec un de ses anciens amis, c'était il

(1) Il existe, outre le *Carteggio... di Ticone Brahe...* publié par Favaro, deux autres ouvrages consacrés à la correspondance de Tycho Brahé :

Tychonis Brahe Dani epistolarvm astronomicarvm libri... Imprimebantvr Vranibvrgi Daniae, prostant Francofurti apud Godefridum Tampachium. MDCX. Ce volume contient la correspondance de Tycho avec le landgrave Guillaume IV de Hesse et Rothmann.

Tychonis Brahei et ad eum doctorum virorum epistolae nunc primum collectae et editae a F. R. Friis. Havniae, année 1876-1886.

Beaucoup de lettres de Tycho ont été publiées isolément. On en trouve une liste fort étendue dans le " *Bibliographical Summary* ", publié par M. Dreyer dans sa biographie de Tycho Brahé citée ci-dessus; pp. 392-396.

est vrai une bien autre affaire. Nicolas Reimers, entre autres, lui fit durement sentir le danger de se parer des plumes du paon. Voleur, ignorant, plagiaire, voilà Tycho, dit-il, et dans son traité des *Hypothèses astronomiques*, il en poursuit impitoyablement la longue et mortifiante démonstration (1).

On est trop loin aujourd'hui pour se laisser influencer par les passions du temps. Les injures de Reimers ne suffisent pas pour mettre en doute le mérite de Tycho Brahé, mais elles le montrent une fois de plus, les grands hommes ont leur faible. Tycho n'y échappait pas. Il avait celui de s'attribuer de temps en temps avec une bonne foi naïve les découvertes d'autrui, et sa lettre adressée à Sascerides pour être transmise à Magini en fournit un très curieux exemple.

Ami commun de Magini et de Tycho, Sascerides remplissait alors le rôle d'intermédiaire mettant les deux savants en relation. De ce ton de condescendance bienveillante et un peu protectrice qu'il affectionne, Tycho permet à Sascerides de faire connaître à l'astronome italien son " Dogma IV planorum ". Magini y apprendra, dit-il, à résoudre directement un triangle rectiligne, dont on connaît deux côtés et l'angle compris. La méthode ancienne, on le sait, était indirecte, et consistait à décomposer le triangle proposé en une somme ou une différence de triangles rectangles.

Tycho croit évidemment faire part à Magini d'une découverte importante et surtout neuve. Le ton ingénu de sa lettre ne laisse aucun doute à cet égard. Et cependant il s'agissait d'une formule tombée dans le domaine public depuis huit ans ; c'était

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{tang} \frac{1}{2}(A+B)}{\text{tang} \frac{1}{2}(A-B)}.$$

Thomas Finkius, le plus consciencieux des écrivains, l'avait donnée, dans sa *Geometria rotundi* (2), comme neuve et de son invention. Il en était incontestablement l'auteur ; sa *Geometria rotundi* était classique et fort répandue ; bien plus, et ce n'est

(1) Pour citer au moins un passage, voyez : " Sequuntur ex literis Tychonis in me convitia et mendacia. " *De Astron. Hypoth.* pp. (E iv) r°.(F iv) r°.

(2) *Thomae Finkii Flenpurgensis Geometria rotundi Libri XIIII... Basileae per Sebastianum Henricpetri.* Sans date au titre, mais à la dernière page on lit : *Anno..... M. D. LXXXIII*; p. 292.

pas le moins piquant de l'affaire. Magini le comptait parmi ses correspondants habituels (1).

A propos de cette formule, disons-le, en passant, pour ne plus y revenir, la trigonométrie rectiligne de Tycho Brahé tout entière est beaucoup moins originale que sa trigonométrie sphérique. Elle renferme une seule formule nouvelle méritant l'attention. Nous l'écririons aujourd'hui :

$$\operatorname{tang} C = \frac{b \sin A}{c - b \cos A}.$$

Comme la formule de Thomas Finkius, elle appartient au " Dogma IV planorum ", et sert à résoudre le triangle par décomposition en triangles rectangles. Ainsi donc, abordons immédiatement la trigonométrie sphérique.

On y lit cinq propositions remarquables. En voici d'abord la transcription en notations modernes. J'y joins chaque fois les formules anciennes qu'elles étaient destinées à remplacer.

Dogma I. On donne les côtés b et c de l'angle droit d'un triangle rectangle ; on demande l'hypoténuse a.

Solution :

$$\cos a = \frac{1}{2}\,[\cos(b - c) + \cos(b + c)].$$

C'est l'équivalent de la formule des Grecs (2)

$$\cos a = \cos b \cos c.$$

Dogma III. Dans un triangle rectangle on donne le côté b de l'angle droit et l'angle C adjacent et différent de 90° ; on demande l'angle B opposé à b.

Solution :

$$\cos B = \frac{1}{2}\,[\sin(C + b) + \sin(C - b)].$$

C'est une transformation de la formule de Geber (3)

$$\cos B = \cos b \sin C.$$

(1) Voyez la table du *Carteggio di Ticone Brahe.*

(2) On la trouve entre autres dans *Claudii Ptolemaei Opera quae extant omnia. Syntaxis Mathematica edidit Heiberg Lipsiae Teubner, 1898.* Tom. I, liv. 2, ch. 2, p. 91.

(3) *Instrumentum primi mobilis, a Petro Apiano nunc primum et inventum et in lucem editum... Accedunt iis Gebri... libri IX de Astronomia... Norimbergae apud Io. Petreium, anno MDXXXIII.* Lib. I, prop. XV, p. 13.

Dogma VI. On donne les côtés b et c d'un triangle obliquangle, avec l'angle compris A ; on demande le côté a.

Solution :

$$\cos a = \frac{1}{2}\,[\cos(b - c) + \cos(b + c)] + \frac{1}{2}\,[\cos(b - c) - \cos(b + c)] \cos A.$$

C'est la formule d'Albategnius (1)

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Dogma VII. On donne le côté a d'un triangle obliquangle avec les angles adjacents B et C ; on demande l'angle A.

Solution :

$$\cos A = \frac{1}{2}\,[\cos(B - C) - \cos(B + C)] \cos a - \frac{1}{2}\,[\cos(B + C) + \cos(B - C)].$$

C'est la plus remarquable des formules de la trigonométrie de Tycho Brahé. Elle équivaut au théorème corrélatif de celui d'Albategnius

$$\cos A = \sin B \sin C \cos a - \cos B \cos C.$$

Nous aurons à y revenir.

Dogma IX et dernier. On donne les côtés a, b, c d'un triangle obliquangle ; on demande l'angle A opposé à a.

Solution :

$$\cos A = \frac{\cos a - \frac{1}{2}\,[\cos(b - c) + \cos(b + c)]}{\frac{1}{2}\,[\cos(b - c) - \cos(b + c)]}.$$

(1) *Continentur in hoc libro. Rudimenta astronomica Alfragani. Item Albategnius astronomus peritissimus de motu stellarum... Norimbergae MDXXXVII.* Ch. XI, f° 15 r°.

Cette formule est bien équivalente à celle d'Albategnius, mais dans l'ouvrage de l'astronome arabe cette dernière a une forme se rapprochant plutôt de celle du Dogma IX ci-dessous.—Voir pour plus de détails *von Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie,* Leipzig, Teubner 1900, p. 53. Ce point d'histoire y est traité avec plus d'exactitude que dans les *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik de Cantor* (2e éd. tom. I, p. 694) ou dans l'*Histoire de l'Astronomie du Moyen Age de Delambre* (p. 20).

C'est :

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Formule d'Albategnius, nous l'avons dit plus haut.

Quant au théorème corrélatif de ce Dogma IX : calculer les côtés d'un triangle dont on donne les angles, il était connu depuis Regiomontan (1). Après lui Copernic s'en était occupé (2). Mais il était de peu d'usage dans l'astronomie du XVIe siècle ; Tycho le passe sous silence.

Pour apprécier l'intérêt des théorèmes précédents, rappelons avant tout leur date de 1591.

Depuis quarante ans les astronomes possédaient dans le petit *Canon* de Rheticus (3) les tables des six lignes trigonométriques naturelles ; ils devaient attendre plus de vingt ans encore avant d'avoir celles de leurs logarithmes. La *Mirifica logarithmorum canonis descriptio* de Neper est de 1614.

Tycho prend le contre-pied de la méthode de l'algébriste anglais. Au lieu de chercher à transformer les sommes et les différences en produits, il fait l'inverse et transforme les produits en sommes et en différences. A la place des logarithmes il emploie la prosthaphérèse, car c'est le nom que sa méthode a pris dans l'histoire (4).

Il faut être familier avec les géomètres de la fin du XVIe et du commencement du XVIIe siècle ; il faut avoir eu en main les calculs formidables d'un Adrien Romain (5) ou d'un Ludolphe van Ceulen (1), avoir senti le poids écrasant de l'obstacle opposé au progrès de la science par la longueur des méthodes anciennes ; il faut tout cela, dis-je, pour comprendre combien les procédés de Neper et de Tycho étaient utiles, et quel soulagement ils apportaient aux astronomes !

On en était arrivé au point de mesurer souvent la valeur d'un géomètre, surtout à son habileté dans le calcul arithmétique. Adrien Romain que je viens de nommer, savant distingué cependant, en fournit une preuve typique. Personne n'a plus profondément étudié Viète. Mais qu'admire-t-il surtout en lui? L'algébriste? Le réformateur de la trigonométrie? Sans doute, mais bien au-dessus de cela, le prodigieux calculateur. Qu'on relise l'histoire de ses relations avec Viète à propos de l'équation du 45e degré, si l'on veut s'en convaincre (2).

Mais assez sur ce sujet, car j'entends le lecteur me poser une question : Les logarithmes sont incontestablement l'invention de Neper, la prosthaphérèse est-elle de même la découverte de Tycho Brahé ?

S'il fallait l'en croire, oui. La prosthaphérèse est sa méthode, dit-il dans sa correspondance, et il en revendique parfois la paternité avec un soin jaloux (3).

Il faut en rabattre; la prosthaphérèse était vieille de près d'un siècle. Mais cette fois je me garderai de taxer de nouveau Tycho de ridicule, de lui reprocher de se parer des plumes du paon; car autre chose est d'avoir une idée le premier, autre chose de la mettre en valeur et de la faire fructifier.

Sans sortir de l'histoire de la trigonométrie, en veut-on un exemple ?

Les Indiens, et probablement les Grecs eux-mêmes, ont eu

(1) *Doctissimi viri et mathematicarum disciplinarum eximii Professoris Ioannis de Regiomonte de Triangulis omnimodis libri quinque... Norimbergae, in aedibus Io. Petri. Anno Christi MDXXXIII.* Lib. IV, Prop. 33, pp. 121 122.

(2) *De lateribvs et angvlis triangvlorvm tum planorvm rectilineorvm, tum sphaericorum, liber eruditissimus et utilissimus... scriptus a clarissimo et doctissimo uiro D. Nicolao Copernico Torinensi... Excussum Vitlembergae per Ioanem Lufft. Anno M. D. XLII ;* fo Ciij vo. — Plus tard ce petit opuscule forma les chapitres 13e et 14e du livre I, *De Revolutionibus orbium coelestium.* La proposition est la 15e du chap. 14.

(3) Publié à Leipzig, chez Wolfgang Gunter, en 1551.

(4) De πρόσθεσις addition et ἀφαίρεσις soustraction. De nos jours l'histoire de la prosthaphérèse a été étudiée surtout par le docteur von Braunmühl de Munich ; ses travaux sont résumés dans ses *Vorlesungen üb. Gesch. der Trig. tom. I* (voir la table au mot " prosthaphæresis ").

(5) Voir : *Ideae mathematicae... sive Methodus polygonorum... Authore Adriano Romano Lovaniensi... Lovanii, M. D. XCIII*, etc. etc.

(1) Voir : *De Arithmetische en Geometrische Fondamenten van M. Ludolf van Ceulen... Leyden, M. D. CXV*, Het sesde deel deses boecx, pp. 247 et suiv.

(2) Voir : Notice sur le *Mathématicien Louvaniste Adrien Romain* par Philippe Gilbert, publiée dans la REVUE CATHOLIQUE, t. XVII, 1859, p. 406.

En recourant au texte original du problème, on s'aperçoit que c'est bien moins un exercice sur les sections angulaires qu'un calcul numérique que Romain a en vue. " Non dubito, dit-il, quin Ludolf van Collen ejus solutionem saltem in numeris sit inventurus ". *(Ideae mathematicae*, p. 14 n. ch). On conçoit dès lors son admiration de voir Viète trouver la solution de l'équation en quelques instants.

(3) Voir la lettre de Sascerides du 1er février 1591 citée ci-dessus *(Carteggio di Ticone Brahe*, p. 203).

l'idée des sinus (1) ; ce n'est cependant qu'Albategnius qui en comprit toute l'utilité. C'est lui qui les substitua définitivement aux cordes, et eut l'autorité suffisante pour imposer à tous cette réforme. Est-ce à tort, si l'histoire lui en fait honneur ?

Jean Werner de Nuremberg conçut de même la prostaphérèse ; Tycho la vulgarisa. Mais pour comprendre ce qu'elle lui doit, il est nécessaire de rappeler ici quelques faits.

Werner naquit à Nuremberg le 14 février 1468. De 1493 à 1498 il séjourna à Rome, et à part cette interruption de cinq ans, il semble avoir écoulé sa vie entière dans sa ville natale. Il y mourut en 1528.

C'était un homme de haute valeur ; ses contemporains sont unanimes à le reconnaître. Il a beaucoup écrit mais édité peu lui-même. L'intérêt de ses rares travaux imprimés fait d'autant plus regretter la perte de ses manuscrits. L'un d'eux surtout est resté célèbre; c'était un traité de trigonométrie sphérique en cinq livres intitulé : *De Triangulis per maximorum circulorum segmenta constructis libri V* (2). Werner y donnait les premières règles de la prosthaphérèse. Il en méditait l'impression, mais ne trouva pas d'éditeur.

A sa mort le manuscrit passa à un mécanicien de Nuremberg, Georges Hartmann, connu dans l'histoire pour avoir observé le premier l'inclinaison de l'aiguille aimantée. Plus tard nous le voyons encore entre les mains de Rhéticus, puis on en perd la trace.

Rhéticus y remarqua-t-il la prostaphérèse ? La fit-il connaître autour de lui ? On ne saurait l'affirmer d'une manière certaine, mais la chose est probable ; car c'est à Uranibourg, c'est à Cassel, c'est en un mot dans les observatoires gardiens des grandes traditions de Copernic que nous la retrouvons. Mais dès lors on y avait perdu le souvenir de son premier inventeur.

Écoutons sur ce sujet, un des plus brillants élèves de Tycho.

(1) Voir von Braunmühl, *Vorles. üb. Gesch. der Trig.* Tom. I, pp. 34, 49 et 260.

(2) La *Bibliographie générale de l'Astronomie* par Houzeau et Lancaster (t. I, 1re partie, Bruxelles, Hayez, 1887, p. 561) cite : " Werner Jean, De triangulis sphaericis libri quatuor ; de meteoroscopiis libri V ; nunc primum studio et diligentia Ioachimi Rhetici in lucem editi ; 4° Cracoviae 1507 „. Ce renseignement est erroné.

Voyez l'histoire du manuscrit de Werner dans von Braunmühl, *Vorles. über Gesch. der Trigonom.* Tom. I, p. 133, ou dans Cantor, *Vorles. über Gesch. der Math.* 2e édit. tom. I, p. 454.

" La prosthaphérèse, dit Chrétien Longomontan (1), n'est due ni aux Arabes, ni à Regiomontan ; leurs écrits le prouvent. Personne ne parait l'avoir employée avant notre Tycho et Wittich de Breslau. C'est en 1582, à Huënne, que pour venir en aide aux étudiants d'Uranibourg, ils résolurent ensemble des triangles sphériques par cette méthode. Elle était appliquée pour la première fois. „

Ce dernier point est contestable. Tycho connaissait la prosthaphérèse dès 1580 (2), mais ce n'est pas ici le moment de le démontrer. Ce qu'il importe de remarquer, c'est que Wittich et lui en sont les auteurs aux yeux de Longomontan. Est-ce tout à fait à tort ? Non, car dans un petit cercle d'initiés, nous voyons Tycho employer toute son activité et toute son influence pour la faire triompher.

Ce cercle était de rayon restreint, il est vrai ; mais ceci demande derechef un mot d'éclaircissement.

Rien n'est plus contraire à nos habitudes modernes de diffusion de la pensée et de division du travail, que le sentiment auquel obéit Tycho. On voit poindre déjà chez lui le travers de cacher les démonstrations et les méthodes, travers qui devait s'accentuer d'une manière si funeste à la science, chez tant de grands génies aux siècles suivants. Sans doute Tycho encourage la prosthaphérèse, il cherche même par tous les moyens à en faire apprécier les avantages ; mais dans le cercle de ses élèves et de ses amis, mais dans le but d'assurer la supériorité des calculateurs d'Uranibourg. L'idée de la lancer dans le public, d'en faire le profit de tous ne lui vient pas ; c'est à Nicolas Reimers qu'en échut l'honneur.

Qu'il avait raison cette fois de signer le *Fundamentum Astronomicum* (3) : Nicolaus Raymarus Ursus Dithmarsus, Nicolas Reimers l'Ours de Dithmarsch ; car c'était bien le pavé de l'ours, qu'il lançait au grand astronome ! Tycho en conçut un ressentiment profond et les deux savants se poursuivirent désormais

(1) *Astronomia Danica, vigiliis & opera Christiani Longomontani... elaborata... Amsterdami, apud Ioh. et Cornelium Blaev. M. DC. XXXX.* ; p. 7.

(2) La démonstration en a été faite par von Braunmühl. *Zur Geschichte der prosthaphaeretischen Methode,* publié dans le *Festschrift zum Siebzigsten Geburtstage Moritz Cantors*, Leipzig. 1899 ; p. 19.

(3) *Nicolai Raymari Vrsi Dithmarsi Fundamentum Astronomicum.... Argentorati, excudebat Bernhardus Iobin. 1588* ; p. 16 v°.

d'une haine féroce. Mais ne nous écartons pas de notre sujet ; je n'ai pas à faire l'histoire de leur querelle (1).

Le célèbre réformateur du calendrier, le jésuite Clavius, saisit du premier coup d'œil l'importance de l'indiscrétion de Reimers. Il eut alors un trait de génie et fit aussitôt faire un progrès considérable à la prosthaphérèse (2). Tycho l'appliquait au seul cas du produit de deux sinus; Clavius l'étendit à celui du produit de deux grands nombres quelconques. C'est un des plus beaux théorèmes de son traité de l'*Astrolabe* (3). Il y donne à cette occasion le plus ancien exemple imprimé de l'emploi d'un angle auxiliaire (4).

Voici ce que deviennent en notations modernes les " Dogmata VI et IX „ de Tycho modifiés d'après les idées de Clavius. Les énoncés en sont transcrits dans l'*Astronomia Danica* (5) de Longomontan ; car Clavius s'est contenté de démontrer la généralité de la méthode, sans entrer ensuite aussi loin que lui dans tous les détails de l'application.

Dogma VI. On donne les côtés b, c d'un triangle obliquangle et l'angle compris A ; on demande le côté a.

Solution :

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}[\cos(b-c) - \cos(b+c)]$$

$$\cos a = \frac{1}{2}[\cos(b-c) + \cos(b+c)]$$

$$+ \frac{1}{2}[\cos(A-\varphi) + \cos(A+\varphi)]$$

Dogma IX. On donne les côtés a, b, c d'un triangle obliquangle ; on demande l'angle A opposé à a.

(1) On y donne volontiers tous les torts à l'Ours de Dithmarsch. C'est peu équitable, comme Rudolf Wolf l'a fort bien montré dans les *Astronomische Mittheilungen* (LXVIII, Zurich, 1886).

(2) Dans son livre *De Astronomicis Hypothesibus*, Reimers reconnait que ce progrès est bien dû à Clavius (f° Fij r°, n° 23). Je saisis l'occasion pour appeler l'attention sur l'importance des renseignements historiques contenus dans ce rarissime opuscule. Il forme un complément précieux de la correspondance de Tycho Brahé.

(3) *Christophori Clavii Bambergensis e Societate Jesu Astrolabium.., Romae... Ex Typographia Gabiana MDXCIII.* Lib. I. Lemm. 53, pp. 178-194.

(4) J'ai résumé l'histoire de la méthode des angles auxiliaires dans une des notes de mon mémoire : *Le traité des Sinus de Michel Cognet.* Bruxelles, 1901, p. 20.

(5) Le " dogm. VI „, p. 29 ; le " dogm. IX „, p. 26.

Solution :

$$\cos\varphi = \cos a - \frac{1}{2}[\cos(b-c) + \cos(b+c)]$$

$$\sec\psi = \frac{1}{2}[\cos(b-c) - \cos(b+c)] \times 10$$

$$\cos a = \frac{10\cos\varphi}{\sec\psi} = \frac{1}{2}[\cos(\varphi-\psi) + \cos(\varphi+\psi)] \times 10$$

Il est superflu d'insister sur l'inconvénient de ces multiplications par 10, ou parfois même par des puissances de 10. Aussi appliquée à un quotient la prosthaphérèse conduit-elle aisément à des erreurs assez considérables. Cette imperfection n'a pas échappé à Clavius et il a eu soin de la signaler lui-même (1).

Quant au problème de la détermination du troisième angle d'un triangle dont on connaît un côté et les deux angles adjacents, il se traite d'une manière analogue au " Dogma VI „ (2). Mais je l'ai déjà dit ci-dessus, ce théorème mérite une étude spéciale, et c'est le moment de la faire.

Je ne m'attarderai pas à peindre ici le tableau de l'importance du principe de dualité dans la géométrie moderne ; le lecteur le connaît. Mais s'il n'y a qu'une voix pour proclamer l'excellence de cette méthode et sa fécondité, l'accord cesse d'exister quand il s'agit d'en désigner le premier inventeur. Que le principe de dualité ait eu ses plus anciennes applications dans la théorie des triangles sphériques polaires, le fait n'est guère révoqué en doute ; mais la question est de savoir à qui cette théorie elle-même est due. Chasles et Delambre ont nommé Snellius (3). C'est, je crois, avec raison. Mais il faut le reconnaître, leur opinion admise jadis sans conteste, est aujourd'hui assez discutée. Dans son Histoire de la Trigonométrie (4), M. von Braunmühl n'hésite

(1) *Astrobalium*, p. 193.

(2) *Astronomia Danica*, p. 31.

(3) *Aperçu historique sur l'origine et les développements des méthodes en géométrie...*, par M. Chasles .., Paris, Gauthier-Villars 188?, Ch. II, § 3 p. 54.

Histoire de l'Astronomie du moyen-âge, par M. Delambre, Paris... Courcier... 1819. Liv. 2. Chap. 8, p. 474.

Snellius lui-même a donné la théorie des triangles sphériques polaires dans les *Willebrordi Snellii a Royen R. F. Doctrinae Triangulorum Canonicae Libri IV... Lugduni Batavorum... Maii M DC XXXVII.* Lib. III. Prop. 8, p. 120.

(4) *Vorles. über Gesch. der Trig.* Tom. I, p. 182. Je passe intentionnellement sous silence, ce que M. von Braunmühl dit de Nasir Eddin (p. 68) ;

pas à revendiquer pour Viète la gloire de la découverte. Sans examiner ici le bien fondé de l'opinion du savant professeur de Munich, voici ce qu'en toute hypothèse on doit lui accorder. Personne ne songera d'ailleurs à le nier, et cette concession suffit pour assigner, comme nous allons le faire, la part de Tycho.

Cédons dans ce but un instant la parole à l'auteur de l'*Aperçu historique*. Aussi bien nul ne parle avec plus d'autorité que lui sur le principe de dualité et son histoire. Chasles s'exprime ainsi (1) :

“ Nous devons surtout remarquer dans la trigonométrie de Viète, une idée neuve et infiniment heureuse, qui a un rapport direct avec les nouvelles doctrines de la Géométrie ; c'est la transformation des triangles sphériques en d'autres, dont les angles et les côtés répondent d'une certaine manière, aux côtés et aux angles des triangles proposés. “ Si des trois sommets „ d'un triangle sphérique, dit-il, comme pôles, on décrit des arcs „ de grands cercles, le triangle nouveau qui en résultera sera „ *réciproque* au premier triangle, tant par les angles que par les „ côtés. „ Hâtons-nous de dire que ce triangle *réciproque* n'est pas précisément le triangle *polaire* ou *supplémentaire*, dans lequel les côtés sont les suppléments des angles des triangles primitifs, et les angles les suppléments des côtés : deux des côtés du triangle de Viète, sont égaux aux angles du triangle proposé, et le troisième côté est égal au supplément du troisième angle.

„ Les géomètres qui écrivirent après Viète sur la géométrie sphérique s'emparèrent de cette heureuse innovation et transformèrent aussi les triangles sphériques, mais en conservant le triangle *réciproque* de Viète. Tels sont Adrien Metius, Magini, Pitiscus, Neper et Cavalieri.

„ La découverte du véritable triangle *supplémentaire*, qui devait résulter inévitablement de la doctrine de transformation de Viète, est due à Snellius. „

Complétons cette analyse de Chasles par l'adjonction d'une date : Viète a donné son triangle réciproque en 1593 seulement (2). La trigonométrie de Tycho Brahé était donc déjà écrite depuis deux ans.

les travaux du savant arabe étaient inconnus à la fin du XVI^e siècle, et ne doivent pas entrer en ligne de compte ici.

(1) *Aperçu historique*, p. 54.

(2) Dans le *Francisci Vietae Variorvm de Rebvs Mathematis Responsorvm Liber VIII.... Tvronis Apud Iamettvm Mettayer.... 1593*, ch. XIX, n° IV, 10, p. 41 r°.

Et maintenant il est temps de conclure.

Que l'algébriste français ait connu le véritable triangle supplémentaire, ou qu'il n'ait pas été au delà du triangle réciproque, peu importe ; ses profondes méditations sur la corrélation des figures de la trigonométrie sphérique lui firent découvrir les formules les plus remarquables. Parmi celles-ci l'une des plus importantes et des plus neuves était sans contredit (1) :

$$\cos A = \sin B \sin C \cos a - \cos B \cos C.$$

Elle formait l'un des fleurons les plus beaux de sa couronne, et l'un des moins contestés. Or Tycho Brahé ne semble-t-il pas bien près de le lui ravir ? Comment aurait-il établi son “ Dogma VII „ s'il ne l'avait pas connu ? Ne le perdons pas de vue, l'analyse algébrique est encore dans l'enfance. Viète comme Tycho démontrent toutes leurs formules par des raisonnements exclusivement géométriques. Rejetons donc, si l'on veut, cette première hypothèse ; c'est qu'alors nous préférons admettre que Tycho a déduit directement le “ Dogma VII „ du “ Dogma VI „. Fort bien ! Mais loin d'aplanir la difficulté de l'invention, cette deuxième hypothèse l'accroît évidemment, et le théorème de Tycho Brahé n'en serait que plus admirable. Quel que soit le parti auquel nous nous arrêtions, le grand astronome doit être désormais rangé parmi les géomètres ; son nom doit figurer sur la liste des précurseurs de Snellius et il n'est plus possible de le taire dans l'histoire du principe de dualité.

Terminons cette trop longue étude par une dernière réflexion. Nous sommes en 1591 et l'année 1591 est bien proche de 1614. Bientôt l'immortelle invention de Neper va éblouir les astronomes et les géomètres. Son éclat les empêchera de fixer encore leurs regards sur cette belle méthode de la prosthaphérèse.

(1) *Op. cit.*, n° XVI, p. 36 r°.

C'est dans le même ouvrage que Viète a donné (ch. XIX, n° XIII, p. 34 v°)

$$\cos a = \cot B \cot C.$$

Cette formule était la sixième des triangles sphériques rectangles. Elle complétait cette théorie en permettant enfin de calculer directement l'un quelconque des éléments du triangle en fonction de deux des autres. Les Grecs connaissaient les quatre premières formules ; Géber avait trouvé la cinquième

$$\cos B = \cos b \sin C.$$

Celle-ci partagera le discrédit dans lequel les logarithmes vont jeter les lignes naturelles. Peu à peu elle déclinera pour finir par être enfin entièrement oubliée.

Qu'il nous soit permis de le regretter. Car un dédain si grand des tables des lignes naturelles, un oubli si complet des méthodes qui leur sont propres, rien ne le justifie.

Dès 1621, l'un des plus fidèles disciples de Tycho, Longomontan reprochait à ses contemporains leur engouement excessif pour les logarithmes (1).

“ C'est sans doute un admirable livre que celui de Jean Neper baron de Merchiston, dit-il ; mais à mon avis ses procédés sont peut-être bien détournés, du moins pour les commençants. Ceux-ci auraient cependant si grand besoin d'être conduits par la voie la plus directe. Voilà pourquoi dans mon ouvrage, je choisirai la prosthaphérèse, méthode tout aussi avantageuse, procédant comme l'autre par voie exclusive d'addition et de soustraction. „

Qu'elle fut tout aussi avantageuse, c'est beaucoup dire. Elle était cependant parfois bien plus simple.

Qu'avons-nous gagné sur Tycho Brahé, quand pour trouver, par exemple

$$\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b$$

nous calculons

$$\frac{\sin (a + b)}{\cos a \cos b} \; ?$$

Qu'avons-nous gagné encore lorsqu'au lieu de chercher directement dans les tables des lignes naturelles

$$\sin p + \sin q$$

nous devons calculer

$$2 \sin \frac{1}{2} (p + q) \cos \frac{1}{2} (p - q) \; ?$$

Deux lectures de tables et une addition donnaient à Tycho la réponse. A nous, il nous faut trois additions ou soustractions, deux divisions par 2 et quatre lectures de tables pour l'obtenir. Je dis “ quatre lectures „, puisqu'il est nécessaire d'en faire une pour repasser du logarithme au nombre. Et qu'il me serait aisé de multiplier les exemples du même genre ! Exemples choisis à dessein cependant parmi ceux que l'on regarde comme se prêtant bien au calcul par logarithmes.

(1) *Astronomia Danica*, p. 7. J'ai résumé le passage.

On paraît l'avoir complètement oublié de nos jours ; l'appel si sensé de Longomontan avait été entendu. Pendant le XVII^e siècle et la plus grande partie du XVIII^e, la plupart des tables trigonométriques donnèrent à la fois les lignes naturelles et leurs logarithmes ; telles étaient, par exemple, les petites tables de Vlacq (1). C'était la bonne et vraie méthode ; on n'eût jamais dû l'abandonner (2). Puisse cette étude de la Trigonométrie de Tycho Brahé avoir contribué à le montrer !

HENRI BOSMANS, S. J.

II

L'ENSEIGNEMENT AGRICOLE EN BELGIQUE DURANT LES ANNÉES 1897-1899

En divers pays les gouvernements secondés par tous ceux qu'intéresse la cause agricole se sont attachés à relever le niveau des connaissances professionnelles de l'agriculteur, afin de lui permettre de soutenir le mieux possible la lutte économique. En Belgique notamment, le Ministère de l'Agriculture organisa rapidement l'enseignement agricole et lui donna le développement adapté aux besoins de l'agriculture nationale, de telle sorte que notre pays possède aujourd'hui un ensemble d'institutions d'instruction agricole, envié de l'étranger et dont nous avons tout lieu d'être fiers.

Le rapport triennal (1897-1899) que vient de publier le Département de l'Agriculture fournit au sujet de la situation de notre enseignement agricole des renseignements très intéressants, qu'il est utile de mettre en relief.

(1) Voir sur ces tables et leurs nombreuses éditions : *Notice sur les Tables logarithmiques hollandaises*, par Bierens de Haan, publiée dans le BULLETTINO DE BONCOMPAGNI, tome VI, Rome 1873, pp. 203 et suiv.

(2) En disant cela je ne fais que répéter une idée de Delambre, *Histoire de l'Astronomie moderne*. Paris, Courcier, 1821 : t. II, Livre 7, p. 16. Voyez aussi : *Remarques sur l'enseignement de la Trigonométrie par M. J. Hoüel* (MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES DE BORDEAUX, 2e sér. tom. V, 1883 ; p. 197 et suiv.).