Note sur la trigonométrie d'Adrien Romain.

Par H. BOSMANS à Bruxelles.

On ne connaît bien souvent la trigonométrie d'ADRIEN ROMAIN[1]) que par son *Canon triangulorum sphaericorum*[2]). Mr v. BRAUNMÜHL notamment, n'analyse que ce seul ouvrage, dans ses *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*[3]). Au fond la chose est assez naturelle; le *Canon* est le plus considérable des travaux d'A. ROMAIN sur la trigonométrie, et se rencontre peut-être plus fréquemment que ses autres écrits trigonométriques, dans

1) ADRIAAN VAN ROOMEN, ROMANUS, ou ROMAIN naquit, à Louvain, le 29 septembre 1561. Professeur de mathématiques et de médecine d'abord à l'université de sa ville natale, puis à celle de Wurzbourg, il mourut à Mayence le 4 mai 1615. Toutes les histoires des mathématiques consacrent quelques pages à A. ROMAIN; et il a donné lieu, en outre, à d'assez nombreuses monographies, parmi lesquelles il faut mettre hors de pair les deux suivantes:

Notice sur le mathématicien louvaniste ADRIANUS ROMANUS, professeur à l'ancienne université de Louvain. — (XVI^e Siècle) par PH. GILBERT. Revue catholique, t. 17 (Louvain 1859), p. 277—286, 394—409, 522—527. — PH. GILBERT, y étudie surtout les travaux géométriques de son illustre prédecesseur dans la chaire de mathématiques de l'université de Louvain.

ADRIEN ROMAIN, premier professeur à la faculté de médecine de Wurzbourg, par A. RULAND. Bibliophile Belge (Bulletin trimestriel publié par la société des bibliophiles de Belgique) 2 (Bruxelles 1867), p. 56—100, 161—187, 256—269. — RULAND y donne une bibliographie des oeuvres d'A. ROMAIN, qu'on peut proposer comme un modèle du genre.

Ecrites à des points de vue très différents et indépendamment l'une de l'autre, les monographies de GILBERT et de RULAND se complètent de la manière la plus heureuse.

2) *ADRIANI ROMANI Canon Triangulorum Sphaericorum, Breuissimus Simul ac facilimus, quamplurimisq; exemplis opticè proiectis illustratus, in gratiam Astronomiae, Cosmographiae, Geographiae, Horologiographiae, &c. Studiosorum iam primùm editus. Accessêre plenioris usus ergô. Tabulae Sinvvm, Tangentivm, Et Secantivm Ex Opere R^di Atq. Eximij Patris Christophori CLAUII S. I. Mathematici celeberrimi desumptae.* Moguntiæ, Ex Officinâ Ioannis Albini, Anno M.DC.IX.

3) Tom. I (Leipzig, Teubner, 1900), p. 229—231. En m'exprimant ainsi, c'est que je compte, bien entendu, limiter ma note à la trigonométrie proprement dite, c'est à dire, à la résolution des triangles; en excluant les travaux d'A. ROMAIN sur la détermination de π, une équation du 45^e degré et le calcul des cordes du cercle.

les bibliothèques publiques. Il ne paraît cependant pas être le plus important; et en tous cas, on ignore d'ordinaire que, loin d'être seul, il faut lui ajouter le *Canon triangulorum rectangulorum*, le *Speculum astronomicum* et la *Mathesis polemica*[1]). Je ne prétends pas présenter ces opuscules au lecteur, comme contenant tous les trois des découvertes de premier ordre; mais la haute situation occupée, en son vivant, par A. ROMAIN, aux universités de Louvain et de Wurzbourg; ses relations d'amitié avec CLAVIUS, MAGINI, VIÈTE, LUDOLPHE VAN COLLEN et d'autres princes de la science de son temps; enfin et surtout, la rareté des trois petits volumes que je viens de nommer, donneront, je l'espère, quelque intérêt à la note que je me propose de leur consacrer. Au surplus, le *Speculum astronomicum*, mérite, en toute hypothèse, l'attention de l'historien de la trigonométrie.

I. Canon triangulorum rectangulorum.

Le *Canon triangulorum rectangulorum*, fort oublié aujourd'hui, l'était moins jadis, car VALÈRE ANDRÉ dit l'avoir vu[2]). Il n'existe plus dans les bibliothèques belges; mais RULAND en signalant un exemplaire à Wolfenbüttel[3]), je me suis adressé à la bibliothèque ducale. Celle-ci a eu l'obligeance de m'envoyer ce précieux volume à Bruxelles et de l'y laisser à ma disposition pendant quelques semaines. Qu'elle veuille bien agréer ici l'hommage de mes remerciements et de ma vive reconnaissance.

Le *Canon* est une toute petite brochure de format, in 8^0, comprenant 16 pages imprimées en long, non chiffrées, mais les pages 1, 3, 5, sont signées respectivement A, Aij, Aiij. Il n'a ni frontispice, ni préface et est intitulé:

canon triangvlorvm || rectangvlorvm, tam sphaericorvm || quam rectilineorvm, methodo brevissima || eaque facillima comprehensa: || *Authore* || a. romano medico et mathematico. ||

RULAND croit que le *Canon* fut imprimé à Louvain[4]), conjecture fort plausible. Il doit, en toute hypothèse, avoir été publié peu de temps après l'apparition du *Variorvm de rebvs mathematicis responsorvm*

1) J'en donnerai, ci-dessous, au fur et à mesure la description détaillée et le titre complet.

2) *VALERI ANDREÆ Desseli I. C. Bibliotheca belgica: de Belgis vitis scriptisq; claris. praemissa topographica Belgii totivs sev Germaniae inferioris descriptione. Editio renovata, & tertia parte auctior.* Lovanii, Typis Iacobi Zegers CIƆ.IƆC.XLIII. Cum privilegio Regis, p. 15 et 16. — Il n'est pas inutile de remarquer à ce propos que la bibliographie d'A. ROMAIN ne compte pas moins de 60 numéros. VALÈRE ANDRÉ n'en a cependant vu et n'en nomme que 18. „Scripsit varia (A. ROMANUS), dit-il, ex quibus vidi sequentia": suivent les 18 titres.

3) O. c. p. 161.

4) O. c. p. 162.

liber VIII[1]) par Viète, qui est, on le sait, de 1593. A. Romain semble avoir eu pour but d'y résumer, pour ses élèves, les grandes découvertes faites par le géomètre français dans la théorie des triangles sphériques rectangles.

Le *Canon* débute par ces mots[2]): „Diagrammata duo triangulorum rectangulorum, prius quidem rectilineorum trium, alterum vero sphaericorum quatuor“; après quoi l'auteur donne deux figures, les seules de tout l'ouvrage, l'une composée, comme il le dit, de trois triangles rectilignes, l'autre de quatre triangles sphériques. Elles ne sont pas de grande utilité, et je n'y insiste pas.

Au verso du f° A, Romain définit les notations dont il se servira. Les angles se représenteront par A, B, C, A étant toujours l'angle droit; les côtés opposés respectivement par BC, AC, AB; le rayon du cercle trigonométrique par R.

F° Aij r° et Aij v°. Résolution des triangles rectilignes rectangles. Elle n'a rien de neuf. Romain y distingue six cas:

1° On donne: B ou C et AB.

Solution: $\dfrac{R}{\text{tang } B} = \dfrac{AB}{AC}$; $\dfrac{R}{\sec B} = \dfrac{AB}{BC}$.

2° On donne: B ou C et AC.

Solution analogue.

3° On donne: B ou C et BC.

Solution $\dfrac{R}{\sin C} = \dfrac{BC}{AB}$; $\dfrac{R}{\sin B} = \dfrac{BC}{AC}$.

4° On donne: AB et AC.

Solution $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{R}{\text{tang } B}$; $\dfrac{R}{\sec B} = \dfrac{AB}{BC}$;

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

5° On donne: AB et BC.

Solution: $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{R}{\sec B}$ ou $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{R}{\sin C}$;

$\dfrac{R}{\sin B} = \dfrac{BC}{AC}$ ou $\dfrac{R}{\text{tang } B} = \dfrac{AB}{AC}$;

$$BC^2 - AB^2 = AC^2.$$

6° On donne: AC et BC.

Solution analogue.

F° Aij r° Romain y remarque, que les angles et les côtés d'un triangle sphérique rectangle n'étant pas nécessairement aigus, que d'autre

1) *Francisci Vietae Variorvm De Rebvs Mathematicis Responsorvm, Liber VIII. Cujus praecipua capita sunt, De duplicatione Cubi, & Quadratione Circuli. Quae claudit Πρόχειρον, seu Ad vsum Mathematici Canonis Methodica.* Tvronis, Apud Iamettivm Mettayer, Typographum Regium. 1593. — 2) F° A, r°.

part les tables donnant toujours un angle aigu, il est nécessaire de disposer d'un *„Index“*, dont le rôle est d'indiquer s'il faut s'en tenir au nombre de degrés fourni par la lecture immédiate des tables, ou bien prendre celui de l'arc supplémentaire.[1])

F° Aij v°. Énumération des dix cas qui se présentent dans la résolution des triangles sphériques rectangles.

Chacune des pages restantes [F° (Aiv) r° — (Aviij) v°] contient la solution détaillée d'un de ces cas. Les éléments inconnus y sont déterminés chacun par six proportions différentes, soit au total par 180 proportions (18 par triangle), toutes énoncées d'ailleurs sans la moindre démonstration.

Au fond ces proportions se ramènent aux dix formules devenues classiques, qui de nos jours encore résument la résolution des triangles sphériques rectangles:

$$\frac{R}{\sin BC} = \frac{\sin B}{\sin AC}; \quad \frac{R}{\sin BC} = \frac{\sin C}{\sin AB};$$

$$\frac{R}{\cos AC} = \frac{\cos AB}{\cos BC};$$

$$\frac{R}{\text{cotang } BC} = \frac{\text{tang } AC}{\cos C}; \quad \frac{R}{\text{cotang } BC} = \frac{\text{tang } AB}{\cos B};$$

$$\frac{R}{\text{tang } AC} = \frac{\text{cotang } B}{\sin AB}; \quad \frac{R}{\text{tang } AB} = \frac{\text{cotang } C}{\sin AC};$$

$$\frac{R}{\sin C} = \frac{\cos AC}{\cos B}; \quad \frac{R}{\sin B} = \frac{\cos AB}{\cos C};$$

$$\frac{R}{\text{cotang } B} = \frac{\text{cotang } C}{\cos BC}.$$ [2])

Pour donner une idée du style de l'auteur, voici comment il se sert de cette dernière formule, pour trouver le côté BC d'un triangle sphérique rectangle, dont il connaît les angles B et C.[3])

Quaesitum BC. Index B & C.

$$\text{Ut} \left\{ \begin{array}{ll} R \text{ ad tangentem anguli } B; & \text{ita tangens anguli } C \\ \text{tang. comp. anguli } B \text{ ad } R; & \text{ita tangens anguli } C \\ \text{tang. comp. anguli } C \text{ ad } R; & \text{ita tang. comp. anguli } B \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ad secant.} \\ \text{arcus } BC. \end{array}$$

1) „In singulis articulis sequentis canonis ad unumquodque quaesitum adjunximus indicem, qui est accidens aliquod trianguli ex quo quaesiti species cognosci debet.“

2) La présence de cette formule dans le *Canon* ne permet pas de lui donner une date antérieure à 1593. Nous venons de rappeler que le *Variorum responsorum liber VIII* par Viète parut en cette année, et on sait que la formule s'y trouve. (Ch. XIX, n° XIII, f° 34 v°). Un excès de modestie ne fut jamais le faible d'A. Romain. S'il avait été l'auteur d'une formule aussi remarquable, il n'eut pas manqué d'en réclamer bruyamment la paternité. Or ses écrits ne renferment pas de trace d'une prétention de ce genre. — 3) F° (Aiv) r°

Ut $\left\{\begin{array}{l} R \text{ ad tang. compl. ang. } B; \\ \text{tangens anguli } B \text{ ad } R; \\ \text{tangens anguli } C \text{ ad } R; \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} \text{ita tang. compl. ang. } C \\ \text{ita tang. compl. ang. } C \\ \text{ita tang. compl. ang. } B \end{array}\left.\right\}$ $\begin{array}{l} \text{ad sinum} \\ \text{complem.} \\ \text{arcus } BC. \end{array}$

Cette manière de transformer sans changements importants et d'écrire une proportion, toujours la même, de cinq ou six façons différentes étonne aujourd'hui. Elle était dans les habitudes du temps et VIÈTE n'agit pas autrement dans le *Canon mathematicus.*[1]) Ces modifications ont cependant leur raison d'être, car il est aisé de s'assurer, par une mise en nombre, qu'elles peuvent avoir leur utilité propre quand on veut opérer au long, par voie de multiplication et de division, sans emploi des logarithmes.

J'observerai à ce propos, en passant, qu'A. ROMAIN, qui persiffle d'une manière si cinglante RAYMARUS URSUS Dithmarsus, dans le 5e dialogue de son *ARCHIMEDES*[2]), devait connaître la prosthaphérèse[3]), mais qu'il ne semble avoir jamais bien apprécié tous les avantages de cette belle méthode.[4])

1) Voir notamment, p. 35—41. Je crois superflu de transcrire au long les trois titres sous lesquels parut le *Canon mathematicus.* J'ai établi dans mon mémoire sur le *Traité des Sinus de MICHIEL COIGNET* qu'il n'y a là, à proprement parler, qu'une seule édition (Annales de la société scientifique de Bruxelles **25**:2, 1901, p. 21 —24). Je n'y reviens pas et je me contente de renvoyer le lecteur à la note dans laquelle M. ENESTRÖM a résumé la question (Biblioth. Mathem. 1_3, 1901, p. 356). J'y ajouterai que les pseudo-éditions se trouvent *toutes les trois* au British Museum. (Voir: *British Museum. Catalogue of printed books.* Vo: VIETA.)

2) *In ARCHIMEDIS circvli dimensionem Expositio & Analysis. Apologia pro ARCHIMEDE, ad Clariss. virum IOSEPHUM SCALIGERUM. Exercitationes Cyclicae contra IOSEPHUM SCALIGERUM, ORONTIUM FINAEUM, & RAYMARUM VRSUM, in decem Dialogos distinctae. Avthore ADRIANO ROMANO Eqvite Avrato, Matheseωn Excellentissimo professore in Academia Wurceburgensi.* Wurceburgi Anno CIƆIƆXCVII, p. 84—89.

L'exemplaire de l'Université de Louvain a appartenu à A. ROMAIN. Interfolié de papier blanc, il contient des corrections et des additions de la main de l'auteur, écrites, semble-t-il, en vue d'une réédition. Malheureusement elles sont inachevées et ne forment qu'un brouillon.

3) La quadrature du cercle et la prosthaphérèse sont, en effet, données l'une et l'autre dans le *Fundamentum astronomicum* d'URSUS. Voir la Note que j'ai consacrée à cet ouvrage dans le *Traité des Sinus de MICHIEL COIGNET,* p. 16—20.

4) La bibliothèque de l'université de Louvain possède un manuscrit, coté ms. 196, dans lequel on trouve (fo 365—368) le petit traité suivant: *Nova multiplicandi, dividendi, quadrata componendi, radices extrahendi ratio, multò quam pervulgata certior, facilior & majoribus maxime numeris accommodatior Authore A. ROMANO E. A.* Lors de la session de janvier 1904, j'ai présenté cet opuscule, inédit jusqu'ici, à la Société scientifique de Bruxelles, qui en a voté l'impression dans ses Annales. Il y paraîtra incessamment et renferme d'assez curieux renseignements sur les méthodes employées par A. ROMAIN, dans les calculs numériques.

II. Le Speculum astronomicum.

Le *Speculum astronomicum* est un volume de format in 4°, contenant 152 pages, titre compris. Les 151 premières pages, sont numérotées (1—151); la dernière non numérotée renferme le privilège conçu en ces termes:

„Ideae Mathematicae[1]) ADRIANI ROMANI partem eam quae Speculum astronomicum comprehendit, praelo dignam censeo. Datum 16 Iunii 1606. Gviliel. Fabricivs Noviomagus, Apostolicus ac Archiducalis librorum censor.“

Le titre complet de l'ouvrage est:

specvlvm ‖ **astronomicvm** ‖ **sive** ‖ **organvm forma mappae** ‖ **expressvm:** ‖ In quo licet immobili ‖ Omnes qui Primo caelo, Primoqve ‖ mobili ſpectari ſolent motus, per Canones ea ‖ de re conſcriptos, planiſſimè ſine ullius ‖ regulae aut volvelli beneficio ‖ repraeſentantur. ‖ **authore** ‖ ***A. Romano,*** *Equite aurato, Comiti Palatino,* ‖ *Medico Caeſareo: atq; ad D. Ioannis Novi Monasterij* ‖ *Herbipoli Canonico.* ‖ (Petit fleuron.) ‖ **Lovanii,** ‖ Ex officina Ioannis Maſij, ſub Viridi Cruce, anno 1606. ‖ *Sumptibus Authoris. Proſtat Francofurti apud* ‖ *Levinum Hulſium.* ‖[2])

La dédicace, adressée au célèbre archiduc ALBERT, pour lors souverain des Pays-Bas Espagnols, est datée de Louvain, le 16 juin 1606.

L'ouvrage est divisé en deux parties, dont les chapitres 2—7 de la première sont consacrés à la trigonométrie.

En voici d'abord les titres:

Cap. 2. De triangulorum generibus et differentiis, p. 9—18.

Cap. 3. De analytices triangulorum forma seu methodo, p. 19—21.

Cap. 4. De principiis analyticae triangulorum rectilineorum, p. 21—23.

Cap. 5. De principiis methodi linearis analyticae triangulorum sphaericorum, p. 24—35.

Cap. 6. De principiis analyticae logicae triangulorum sphaericorum, p. 35—40.

1) Les *Ideae mathematicae* devaient former une série d'ouvrages qui est malheureusement restée inachevée. L'ouvrage cité plus particulièrement sous ce nom est à proprement parler la *Methodus polygonorum.* C'est ce qui résulte aussi bien des explications d'A. ROMAIN que du titre lui-même qu'il a mis en tête du volume:

Ideae mathematicae pars prima, sive methodvs polygonorvm, qva latervm, perimetrorum & arearum cujuscunque polygoni inveſtigandorum ratio exactissima & certissima; una cum circuli quadratura continentur. Avthore ADRIANO ROMANO Lovaniensi, medico et mathematico. Lovanii, Apud Ioannem Masium, Typog. Iur. Anno CIƆ.IƆ.XCIII. (Bibl. Roy. de Belgique.)

Ideae mathematicae pars prima, sive methodus polygonorum. . . . Antwerpiae, apud Ioannem Keerbergium. Anno CIƆ.IƆ.XCIII. (Univ. de Louvain.)

C'est une même édition qui parut simultanément à Anvers et à Louvain, avec deux adresses d'imprimeur différentes.

2) Deux exemplaires à la bibliothèque royale de Belgique. J'en connais d'autres aux universités de Gand et de Louvain et à la bibliothèque communale à Anvers.

Cap. 7. De canone triangulorum sphaericorum per speculum nostrum, p. 41—50.

Les chapitres 2 et 3 contiennent des généralités. Le chapitre 5 expose les principes des projections coniques et cylindriques des figures dessinées à la surface de la sphère. Le chapitre 7 donne l'application de ces principes à la résolution graphique des triangles sphériques projetés sur un plan. A. Romain affectionnait beaucoup cette méthode, qu'il emploie dans un grand nombre de figures du *Canon triangulorum sphaericorum;* mais je m'écarterais de mon sujet en m'y arrêtant ici.[1]) Quant aux chapitres 4 et 6 ils méritent plus d'attention.

La trigonométrie rectiligne forme l'objet du chapitre 4. On n'y trouve encore aucun de ces essais de notations trigonométriques qui rendent le chapitre 6 si neuf et si intéressant. Je le ferai donc suffisamment connaître, en transcrivant, en langage algébrique moderne, les formules qu'on y trouve. Les numéros d'ordre qui les accompagnent sont ceux dont elles sont affectées dans l'original.

Soient $A, B, C,$ les trois angles; $a, b, c,$ les côtés opposés; r, le rayon du cercle inscrit; R, celui du cercle circonscrit; R_t, celui du cercle trigonométrique.

Formules du premier genre:[2])

1. $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C};$$

$$\frac{a}{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}B + \operatorname{cotg}\frac{1}{2}C} = \frac{b}{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C + \operatorname{cotg}\frac{1}{2}A} = \frac{c}{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}A + \operatorname{cotg}\frac{1}{2}C}.$$

2. $$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{cosec} B}{\operatorname{cosec} A};$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C - \operatorname{tang}\frac{1}{2}B}{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C - \operatorname{tang}\frac{1}{2}A}.$$

3. $$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+C)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)}.$$ [3])

4. $$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}B - \operatorname{tang}\frac{1}{2}C}{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}A - \operatorname{tang}\frac{1}{2}C},$$ [4])

1) A. Romain dit en parlant de ces projections (*Speculum astronomicum*, part. 1, cap. V, p. 34): „Nos de . . . hisce projectionibus . . . conscripsimus Volumen ingens, in quo omnia fere quae in hac materia desiderari possunt annotavimus". Ce travail ne parut jamais. Il est aujourd'hui perdu.

2) „Prioris generis haec sunt" (p. 22), c'est à dire, comme l'auteur l'a expliqué plus haut (p. 21), les formules dans lesquelles interviennent les angles et les côtés eux-mêmes; tandis que dans les formules du second genre on considère leurs segments.

3) Formule due à Thomas Finkius. Voir la note historique que j'ai consacrée à cette analogie, dans le *Traité des Sinus de Michiel Coignet*, p. 25—29.

4) Le *Speculum* a ici une faute d'impression. Au dénominateur on lit tang C au lieu de tang $\frac{1}{2}$ C.

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C}{\operatorname{cosec} C}.$$ [1])

5. $$\frac{a}{r} = \frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}B + \operatorname{cotg}\frac{1}{2}C}{R_t}.$$

6. $$\frac{\frac{1}{2}a}{R} = \frac{R_t}{\operatorname{cosec} A}.$$

7. $$\frac{2bc}{b^2+c^2-a^2} = \frac{R_t}{\cos A}.$$

8. $$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{cosec} C}{\operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} A}.$$

Formules du second genre.[2])

Soit AH la hauteur abaissée de l'angle A.

1. $$\widehat{BAH} = \frac{\pi}{2} - B; \quad \widehat{CAH} = \frac{\pi}{2} - C.$$

2. $$\frac{BH}{CH} = \frac{\operatorname{cotg} B}{\operatorname{cotg} C}.$$

3. $$\frac{c}{BH} = \frac{R_t}{\cos B}; \quad \frac{b}{CH} = \frac{R_t}{\cos C}.$$

4. $$c^2 - b^2 = a(BH - CH).$$

5. $$BH^2 - CH^2 = a(BH - CH).$$

6. $$(c+b)(c-b) = a(BH - CH).$$

7. $$a^2 + b^2 - c^2 = 2a \cdot BH.$$

Soit AM la médiane de l'angle A,

$$\frac{\sin B}{\sin BAM} = \frac{\sin C}{\sin CAM}.$$

Soit AD la bissectrice de A,

$$\frac{b}{c} = \frac{BD}{DC}.$$

Soit enfin AE le diamètre du cercle circonscrit mené par A, et D le point où ce diamètre rencontre la base BC,

1. $$ADC = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(C - B);$$

2. $$\frac{b}{c} = \frac{\cos DAC}{\cos DAB}.$$

Beaucoup de ces formules étaient anciennes et fort connues; mais comme ce chapitre est le seul un peu complet que Romain ait écrit sur la trigonométrie rectiligne, j'ai cru utile de le faire connaître en entier.

Le chapitre 6 est plus important. L'auteur y expose la solution algébrique des triangles sphériques. Il y donne d'abord en abrégé les

1) Si l'un des angles était obtus, dit A. Romain, il faudrait prendre au numérateur la différence des cotangentes. Remarque analogue pour la formule 8.

2) „Posterioris generis fundamenta haec sunt," p. 23.

formules du *Canon triangulorum rectangulorum*. Quant aux triangles obliquangles, toutes ses formules se *ramènent* facilement aux quatre suivantes:

$$(1) \qquad \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c},$$

qu'il écrit d'ordinaire, non plus sous la forme de proportions, mais sous celle de l'égalité de deux rectangles;

$$(2) \qquad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

$$(3) \qquad \cos A + \cos B \cos C = \sin B \sin C \cos a,$$

$$(4) \qquad \operatorname{cotg} A \sin B + \cos B \cos c = \sin c \operatorname{cotg} a.$$

Il est superflu de faire remarquer que (2) et (3) ne s'y rencontrent pas explicitement, mais une des formes de (2) est, par exemple:

$$(5) \qquad \cos a \operatorname{cosec} b = \cos c \operatorname{cotang} b + \sin c \cos A.$$

On reconnaît, dans tout ce chapitre, une connaissance approfondie des œuvres trigonométriques de VIÈTE et les transformations qui pourraient être personnelles à l'auteur sont sans grande importance; aussi n'est ce pas là ce qui donne l'intérêt de premier ordre qu'on ne saurait dénier au chapitre. Mais, dans un article fort bien fait, Mr BRAUNMÜHL a jadis signalé ici même.[1]) le *Canon triangulorum sphaericorum* comme contenant le plus ancien essai systématique de notations trigonométriques. Or le *Canon* n'est que de 1609, tandis que le *Speculum* est de 1606 et par conséquent de trois ans antérieurs. Eh bien! A. ROMAIN y emploie déjà toutes les notations dont il devait se servir plus tard dans le *Canon*. Ce n'est donc pas le *Canon*, mais bien le *Speculum*, qui contient l'emploi systématique le plus ancien, d'une notation trigonométrique.

Il y a cependant quelques légères différences entre les deux ouvrages:

Dans le *Canon*, le sinus, la tangente (prosinus) et la sécante (transinuose) se désignent respectivement par les initiales majuscules romaines S, P, T; dans le *Speculum* A. ROMAIN emploie les majuscules gothiques $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{T}$, et écrit, par exemple: $\mathfrak{S}\,A$, $\mathfrak{P}\,B$, $\mathfrak{T}\,C$.

Dans le *Canon* les lignes des arcs complémentaires se désignent par les mêmes lettres que les lignes de l'arc simple suivies d'un caractère spécial $\sigma\ell$; ainsi $\cos A$ s'écrit $S\,\sigma\ell\,A$. Dans le *Speculum* A. ROMAIN emploie tout bonnement le C cédille $Ç$, ce qui est plus simple et vaut mieux; pour $\cos A$ il écrit: $\mathfrak{S}\,\text{ç}\,A$.

Dans le *Canon* le rayon du cercle trigonométrique se désigne par R; dans le *Speculum* par $\mathfrak{R}$.

Enfin dans les deux ouvrages le mot „Rectangulum" se remplace par §.

1) *Die Entwickelung der Zeichen- und Formelsprache in der Trigonometrie;* Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, p. 65.

D'après ces conventions la formule (5) ci-dessus s'énonce de la manière suivante:[1])

„In sequentium serierum quavis [il y en a six] Rectangulum quodvis sub duabus canonicis aequatur aggregato vel differentiae duorum reliquorum eiusdem seriei

Series prima.

I § sub $\mathfrak{S}\,\text{ç}\,A$ et $\mathfrak{S}\,A\,B$,
II § sub $\mathfrak{S}\,\text{ç}\,A\,B$ et $\mathfrak{P}\,\text{ç}\,A\,C$,
III § sub $\mathfrak{T}\,\text{ç}\,A\,C$ et $\mathfrak{S}\,\text{ç}\,B\,C$."

Les cinq autres séries donnent les formules qui se déduisent de la précédente par un changement de lettres.

Voici un autre genre de notations:

La somme de deux arcs se désigne par ff, leur différence par δ, la demi-somme par βff, la demi-différence par $\beta\,\delta$.

Soit donc la formule:

$$\frac{\sin x + \sin z}{\sin x - \sin z} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+z)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-z)} = \frac{\operatorname{cotg} \frac{1}{2}(x-z)}{\operatorname{cotg} \frac{1}{2}(x+z)}$$

A. ROMAIN l'écrit comme suit:[2])

Summa et differentia sinuum respondentium arcubus assumptis x et z, assimilantur prosinibus $\left\{ \begin{matrix} \beta ff \text{ et } \beta\delta \\ \text{ç}\beta\delta \text{ et } \text{ç}\beta ff. \end{matrix} \right.$

Pour terminer il faut signaler enfin ce qu'il y a peut-être de plus original, de plus remarquable dans tout le chapitre, je veux dire le tableau dans lequel A. ROMAIN résume toute la théorie des triangles sphériques rectangles. Je le transcris textuellement, sans modifications ni commentaires, mais je prie le lecteur qui veut en apprécier le mérite de ne pas perdre de vue sa date de 1606.

„In utraque (serie) supponimus angulum A rectum

$$\begin{matrix} \text{Ut} \\ \mathfrak{R} \\ \text{ad} \end{matrix} \left\{ \begin{array}{lll} \mathfrak{S}\,\alpha & \text{ita } \mathfrak{S}\,\beta & \text{ad } \mathfrak{S}\,\gamma \\ \mathfrak{T}\,\text{ç}\,\alpha & \text{ita } \mathfrak{T}\,\text{ç}\,\beta & \text{ad } \mathfrak{T}\,\text{ç}\,\gamma \\ \mathfrak{P}\,\alpha & \text{ita } \mathfrak{S}\,\text{ç}\,\beta & \text{ad } \mathfrak{P}\,\delta \\ \mathfrak{P}\,\text{ç}\,\alpha & \text{ita } \mathfrak{T}\,\beta & \text{ad } \mathfrak{P}\,\text{ç}\,\delta \\ \mathfrak{S}\,\text{ç}\,\alpha & \text{ita } \mathfrak{P}\,\beta & \text{ad } \mathfrak{P}\,\varepsilon \\ \mathfrak{T}\,\alpha & \text{ita } \mathfrak{P}\,\text{ç}\,\beta & \text{ad } \mathfrak{P}\,\text{ç}\,\varepsilon \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{Porro expo-} \\ \text{nuntur quin-} \\ \text{que modis} \\ \text{nempe} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} BC \\ B \\ AC \\ AB \\ \text{ç}C \end{matrix} \right\} \text{vel} \left\{ \begin{matrix} BC \\ C \\ AB \\ AC \\ \text{ç}B \end{matrix} \right\} \text{vel} \left\{ \begin{matrix} \text{ç}AB \\ \text{ç}AC \\ \text{ç}BC \\ \text{ç}C \\ \text{ç}B \end{matrix} \right\} \text{vel} \left\{ \begin{matrix} \text{ç}AB \\ B \\ \text{ç}C \\ \text{ç}BC \\ AC \end{matrix} \right\} \text{vel} \left\{ \begin{matrix} \text{ç}AC \\ C \\ \text{ç}B \\ \text{ç}BC \\ AB \end{matrix} \right.$$

1) *Speculum astron.*, p. 38. — 2) *Specul. astr.*, p. 37. — 3) *Specul. astr.*, p. 39 et 40.

formules du *Canon triangulorum rectangulorum*. Quant aux triangles obliquangles, toutes ses formules se *ramènent* facilement aux quatre suivantes:

$$(1)\qquad \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c},$$

qu'il écrit d'ordinaire, non plus sous la forme de proportions, mais sous celle de l'égalité de deux rectangles;

$$(2)\qquad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$
$$(3)\qquad \cos A + \cos B \cos C = \sin B \sin C \cos a,$$
$$(4)\qquad \operatorname{cotg} A \sin B + \cos B \cos c = \sin c \operatorname{cotg} a.$$

Il est superflu de faire remarquer que (2) et (3) ne s'y rencontrent pas explicitement, mais une des formes de (2) est, par exemple:

$$(5)\qquad \cos a \operatorname{cosec} b = \cos c \operatorname{cotang} b + \sin c \cos A.$$

On reconnaît, dans tout ce chapitre, une connaissance approfondie des œuvres trigonométriques de Viète et les transformations qui pourraient être personnelles à l'auteur sont sans grande importance; aussi n'est ce pas là ce qui donne l'intérêt de premier ordre qu'on ne saurait dénier au chapitre. Mais, dans un article fort bien fait, Mr Braunmühl a jadis signalé ici même,[1]) le *Canon triangulorum sphaericorum* comme contenant le plus ancien essai systématique de notations trigonométriques. Or le *Canon* n'est que de 1609, tandis que le *Speculum* est de 1606 et par conséquent de trois ans antérieurs. Eh bien! A. Romain y emploie déjà toutes les notations dont il devait se servir plus tard dans le *Canon*. Ce n'est donc pas le *Canon*, mais bien le *Speculum*, qui contient l'emploi systématique le plus ancien, d'une notation trigonométrique.

Il y a cependant quelques légères différences entre les deux ouvrages:

Dans le *Canon*, le sinus, la tangente (prosinus) et la sécante (transinuose) se désignent respectivement par les initiales majuscules romaines S, P, T; dans le *Speculum* A. Romain emploie les majuscules gothiques $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{T}$, et écrit, par exemple: $\mathfrak{S}\,A$, $\mathfrak{P}\,B$, $\mathfrak{T}\,C$.

Dans le *Canon* les lignes des arcs complémentaires se désignent par les mêmes lettres que les lignes de l'arc simple suivies d'un caractère spécial $\sigma\mathfrak{C}$; ainsi $\cos A$ s'écrit $S\,\sigma\mathfrak{C}\,A$. Dans le *Speculum* A. Romain emploie tout bonnement le C cédille $Ç$, ce qui est plus simple et vaut mieux; pour $\cos A$ il écrit: $\mathfrak{S}\,ç\,A$.

Dans le *Canon* le rayon du cercle trigonométrique se désigne par R; dans le *Speculum* par $\mathfrak{R}$.

Enfin dans les deux ouvrages le mot „Rectangulum" se remplace par §.

1) *Die Entwickelung der Zeichen- und Formelsprache in der Trigonometrie;* Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, p. 65.

D'après ces conventions la formule (5) ci-dessus s'énonce de la manière suivante:[1])

„In sequentium serierum quavis [il y en a six] Rectangulum quodvis sub duabus canonicis aequatur aggregato vel differentiae duorum reliquorum eiusdem seriei

Series prima.

I § sub $\mathfrak{S}\,ç\,A$ et $\mathfrak{S}\,A\,B$,
II § sub $\mathfrak{S}\,ç\,A\,B$ et $\mathfrak{P}\,ç\,A\,C$,
III § sub $\mathfrak{T}\,ç\,A\,C$ et $\mathfrak{S}\,ç\,B\,C$."

Les cinq autres séries donnent les formules qui se déduisent de la précédente par un changement de lettres.

Voici un autre genre de notations:

La somme de deux arcs se désigne par ſſ, leur différence par δ, la demi-somme par β ſſ, la demi-différence par $\beta\,\delta$.

Soit donc la formule:

$$\frac{\sin x + \sin z}{\sin x - \sin z} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+z)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-z)} = \frac{\operatorname{cotg} \frac{1}{2}(x-z)}{\operatorname{cotg} \frac{1}{2}(x+z)}$$

A. Romain l'écrit comme suit:[2])

Summa et differentia sinuum respondentium arcubus $\left\{ \begin{array}{l} \beta ſſ \text{ et } \beta\delta \\ ç\beta\delta \text{ et } ç\beta ſſ. \end{array}\right.$
assumptis x et z, assimilantur prosinibus

Pour terminer il faut signaler enfin ce qu'il y a peut-être de plus original, de plus remarquable dans tout le chapitre, je veux dire le tableau dans lequel A. Romain résume toute la théorie des triangles sphériques rectangles. Je le transcris textuellement, sans modifications ni commentaires, mais je prie le lecteur qui veut en apprécier le mérite de ne pas perdre de vue sa date de 1606.

„In utraque (serie) supponimus angulum A rectum

$$\begin{array}{c} \text{Ut} \\ \mathfrak{R} \\ \text{ad} \end{array} \left\{ \begin{array}{lll} \mathfrak{S}\,\alpha & \text{ita } \mathfrak{S}\,\beta & \text{ad } \mathfrak{S}\,\gamma \\ \mathfrak{T}\,ç\,\alpha & \text{ita } \mathfrak{T}\,ç\,\beta & \text{ad } \mathfrak{T}\,ç\,\gamma \\ \mathfrak{P}\,\alpha & \text{ita } \mathfrak{S}\,ç\,\beta & \text{ad } \mathfrak{P}\,\delta \\ \mathfrak{P}\,ç\,\alpha & \text{ita } \mathfrak{T}\,\beta & \text{ad } \mathfrak{P}\,ç\,\delta \\ \mathfrak{S}\,ç\,\alpha & \text{ita } \mathfrak{P}\,\beta & \text{ad } \mathfrak{P}\,\varepsilon \\ \mathfrak{T}\,\alpha & \text{ita } \mathfrak{P}\,ç\,\beta & \text{ad } \mathfrak{P}\,ç\,\varepsilon \end{array} \right.$$

$$\left.\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{Porro expo-} \\ \text{nuntur quin-} \\ \text{que modis} \\ \text{nempe} \end{array} \left\{\begin{array}{c} BC \\ B \\ AC \\ AB \\ çC \end{array}\right\} \text{vel} \left\{\begin{array}{c} BC \\ C \\ AB \\ AC \\ çB \end{array}\right\} \text{vel} \left\{\begin{array}{c} çAB \\ çAC \\ çBC \\ çC \\ çB \end{array}\right\} \text{vel} \left\{\begin{array}{c} çAB \\ B \\ çC \\ çBC \\ AC \end{array}\right\} \text{vel} \left\{\begin{array}{c} çAC \\ C \\ çB \\ çBC \\ AB \end{array}\right.$$

1) *Speculum astron.*, p. 38. — 2) *Specul. astr.*, p. 37. — 3) *Specul. astr.*, p. 39 et 40.

Series analogiarum altera

Ut	𝔓 α	ita 𝔓 β	ad 𝔖 γ
ℜ	𝔓 ç α	ita 𝔓 ç β	ad 𝔗 ç γ
ad	𝔖 α	ita 𝔗 β	ad 𝔖 δ
	𝔗 ç α	ita 𝔖 ç β	ad 𝔗 ç δ
	𝔗 α	ita 𝔖 β	ad 𝔖 ε
	𝔖 ç α	ita 𝔗 ç β	ad 𝔗 ç ε

α	Hic quoque exponuntur quinque modis	ç*B*		ç*BC*		ç*BC*		*AB*		*AC*
β		ç*C*		*AB*		*AC*		ç*C*		ç*B*
γ		ç*BC*	vel	ç*B*	vel	ç*C*	vel	*AC*	vel	*AB*
δ		ç*AC*		ç*AC*		ç*AB*		*BC*		*BC*
ε		ç*AB*		*B*		*C*		*B*		*C*[1])

III. La Mathesis polemica.

La *Mathesis polemica* est de nouveau un volume rarissime; si rare même, que malgré ses longues et minutieuses recherches, Ruland dit n'en avoir découvert aucun exemplaire[2]). On le possède cependant aujourd'hui aux universités de Gand et de Louvain. J'en transcris d'abord le titre:

mathesis ‖ **polemica.** ‖ **avthore** ‖ **a. romano, equite** ‖ **aurato, comite pala-** ‖ **tino, et medico caesareo.** ‖ *Ad Illuſtr^mum Dominum, D.* **Alexan-** ‖ **drvm** *Ducem de Oſtrog in Zaslaw,* ‖ *Palatinidē Volhiniae.* ‖ (Cul-de-lampe.) ‖ **Francofurti,** ‖ Sumptibus Laeuini Hulſij Gandenſis ‖ 1605. ‖

C'est un in-8° de 274 pages, dont les 16 premières ne sont pas numérotées, mais dont la 17e est cotée 13.

La dédicace adressée „Illustr^mo Domino D. Alexandro duci de Ostrog in Zaslaw Palatinidae Volhiniae domino suo colendissimo", est datée: „Ex Musaeo nostro Lovanii Kal. Ianuarii, 1605".

La *Mathesis polemica* traite de l'application des mathématiques à l'art de la guerre. Elle est divisée en trois parties dont seule la seconde intitulée: „Ratio dimetiendi loca inacessibilia",[3]) doit nous occuper.

Cette seconde partie est un hors-d'œuvre. A. Romain semble même n'avoir fait qu'y utiliser de vieilles notes écrites primitivement dans un autre but; car dans son inappréciable et si curieuse nomenclature d'ouvrages

1) L'original renferme l'une ou l'autre pure faute d'impression, qui ont été corrigées et qu'il est sans intérêt de signaler.

2) O. c. p. 263 Ruland connaissait l'existence de l'ouvrage par Valère André qui l'avait vu (voir *Bibliotheca Belgica* p. 16).

3) *Mathesis polemica* p. 111.

sur les instruments de mathématiques, Liévin Hulsius, éditeur, compatriote et même parent d'A. Romain, écrit:[1])

„(Ad annum) 1603. Adrianus Romanus D. habet jam prae manibus praxim catholicam, mensurandi per quadratum, quadrantem et gnomonem."

Or d'une part jamais A. Romain n'a publié d'ouvrage séparé sur le sujet; d'autre part il le traite ici avec une surabondance d'explications, tout à fait hors de propos, et un vrai luxe d'exemples numériques.

Ce doit être le travail qu' Hulsius avait vu.

Quoi qu'il en soit, ce qui, à notre point de vue, rend intéressant le problème de la mesure d'une distance inaccessible c'est que comme l'auteur a soin de le dire dans l'introduction,[2]) il le résout par les seules tangentes et cotangentes, à l'exclusion des autres lignes trigonométriques. C'est là, ajoute-t-il, une „méthode toute neuve et non vulgaire".[3]) Pour mieux accentuer son intention, il termine cette seconde partie, par une table de tangentes, calculée au rayon 10^6 et de minute en minute, pour tous les degrés du premier quadrant.[4])

Toutes les formules données ici par A. Romain se ressemblent, et il serait oiseux d'en faire l'énumération. On en aura une idée suffisante en en choisissant une au hasard, que j'exprime en langage moderne. Elle appartient au „Lemma II" dont voici l'énoncé général:[5])

„Si ad basim quamlibet intelligatur constituta orthogonalis; ex dato quovis segmento orthogonalis indagare segmentum quodvis baſeos."

Soit donc AOC un angle droit, dont nous supposerons le côté AO horizontal et CO vertical.

Sur AO, marquons le point B, entre A et O; sur CO, le point D, entre C et O.

1) *Tractatus primvs instrvmentorvm mechanicorvm Levini Hvlsii. Ocvlaris demonstratio novi geometrici instrumenti planimetrvm dicti, vnà cum suo indvectorio, cuius beneficio circumferentia prouinciae controuerſae, vrbis, arcis, caſtrorum, vel quaeuis superficies in campo obseruari, dimetiri, notari, & in charta delineari, eorumque area, ſiue magnitudo facile inueniri poteſt: Nec non retis & triplicis tum quadrati tum quadrantis vsus, quibus omnis longitudinis, altitudinis, latitudinis & profunditatis obseruatio lucidissime demonstratur.* Francofvrti ad Moenvm, Ex officinâ Typogr. Wolfgangi Richteri, impensis Authoris. M. DC. V. Cum Priuilegio S. Caeſ. Maiest., p. 8.

Cette édition, qui est au moins la troisième, parut simultanément en latin et en allemand. La bibliothèque royale de Belgique la possède dans les deux langues. Ce n'est pas ici la place de donner la bibliographie d'Hulsius. Je dirai seulement que l'auteur est un marchand d'appareils, qui fait, par ses brochures, de la réclame *sérieuse* et *savante* pour son article. Quand il a fait la théorie et exposé la pratique d'un instrument, il finit toujours par dire, d'une manière ou de l'autre, qu'on peut l'acheter chez lui.

2) *Math. polem.* p. 111—112. — 3) O. c. p. 111—112. — 4) O. c. p. 193—232.
5) O. c. p. 122 et 123.

On mesure AB et les quatre angles CAO, DAO, CBO, DBO.
On demande la longueur de CD.
Solution:

$$\frac{\text{cotg } CAO - \text{cotg } CBO}{R} = \frac{AB}{CO, \text{ inventum I}};$$

$$\frac{\text{cotg } DAO - \text{cotg } DBO}{R} = \frac{AB}{DO, \text{ inventum II}};$$

$$DO - CO = DC.$$

A. Romain ne mesure directement la distance inaccessible, que dans les seuls cas où elle est parallèle ou perpendiculaire à la base. Quand elle est inclinée sur cette base, il admet qu'on pourra la considérer comme l'hypothénuse d'un triangle rectangle, dont on sait calculer les deux côtés de l'angle droit.[1])

1) O. c. p. 252 et 253.

Beiträge zur Geschichte der Integralrechnung bei Newton und Cotes.

Von A. v. Braunmühl in München.[1])

Die Methode, deren sich Newton in erster Linie bediente, um Integrationen auszuführen, bestand bekanntlich darin, daß er die zu integrierende Funktion in eine konvergente Potenzreihe entwickelte und dann den seit Fermat und Wallis bekannten Satz über die Integration einer Potenz anwandte, weshalb er ihn auch an die Spitze seiner ersten Abhandlung *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* stellte. Aber Newton hat es auch verstanden, in gewissen Fällen Integrale in geschlossener Form anzugeben, wie dies die Leibnizsche Schule in erster Linie anstrebte. Bemerkungen hierüber finden sich mehrfach in seinen Schriften, so z. B. in der umfangreichen längstens Ende 1671 druckfertigen aber erst 1736 gedruckten Abhandlung *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, worin er zwei Tafeln von Integralen angibt, die sich teils in geschlossener Form darstellen, teils nach Newtons Ausdrucksweise, auf die Quadratur von Kegelschnitten zurückführen lassen. Sieht man sich diese Tafeln etwas näher an, so erkennt man in der Hauptsache drei verschiedene Gattungen von Integralen, die hier behandelt sind, nämlich Integrale rational-gebrochener Funktionen, binomische Integrale und Integrale von der Form $\int f(x, \sqrt{e + fx + gx^2})\,dx$, die wir kurz trinomische nennen wollen. Daß Newton bezüglich der binomischen Integrale schon frühzeitig erkannt hat, in welchen Fällen sie sich durch endliche Ausdrücke darstellen lassen, hat Herr Cantor bereits angeführt.[2]) Diesbezügliche Bemerkungen Newtons finden sich in dem zweiten für Leibniz bestimmten Briefe vom 24. Oktober 1676.[3]) Dagegen wurde die Frage,

1) Diese Abhandlung wurde Ostern 1903 dem internationalen Historikerkongreß durch die Güte des Herrn G. Loria vorgelegt und zur Veröffentlichung in den Akten des Kongresses bestimmt. Da eine solche bisher nicht stattgefunden hat, so möge sie in dieser Zeitschrift erscheinen. — 2) *Geschichte der Mathematik* III², 185—186. — 3) *Opuscula Newtoni*, ed. Castillioneus, p. 335—338.