III

SUR LES RECHERCHES RELATIVES A L'HISTOIRE de la formation des « Éléments » d'Euclide

A PROPOS DES DERNIERS TRAVAUX DE ZEUTHEN (1)

Les travaux relatifs à l'histoire des mathématiques grecques, ont été fort nombreux pendant les dernières années qui précédèrent la guerre. Mais, malgré le mouvement de progrès qu'ils imprimèrent à la science, ils n'ont pu faire tout à fait oublier l'*Histoire des Mathématiques* de Montucla (2). On en demeure d'accord. On est, d'autre part, tout aussi unanime à reconnaître que l'étude de la période pré-euclidienne laisse beaucoup à désirer chez l'historien français. Disons mieux : elle y est complètement manquée.

La raison n'en doit pas être cherchée loin. Montucla, mathématicien de talent, était nourri des classiques latins et grecs. Il avait lu Euclide, Archimède, Apollonius, Aristarque, dans leur propre langue, les avait bien compris et exactement appréciés.

(1) Communication faite à la 1re section de la Société scientifique, dans la séance du 27 novembre 1919, tenue à Louvain.

Voici les titres des mémoires qui furent l'objet de cette communication.

Hvorledes mathematiken i tiden fra Platon til Euklid blev rationel videnskab af H. G. Zeuthen. *Avec un résumé en français* (intitulé : *Sur la réforme qu'a subie la mathématique de Platon à Euclide et grâce à laquelle elle est devenue science raisonnée*). Copenhague, 1917. MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES ET DES LETTRES DE DANEMARK. Section des Sciences, 8e série, t. I, n° 5. Un vol. in-4° de 183 pages. Le résumé français a dix pages de petit texte. C'est ce résumé que j'ai utilisé.

Les deux mémoires suivants ont été publiés entièrement en français :

Sur l'origine historique de la connaissance des quantités irrationnelles. BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES ET DES LETTRES DE DANEMARK. Année 1915, nos 3-4 ; pp. 333-362, in-8°.

Sur l'Origine de l'Algèbre. DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB MATHEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER. II, 4. Copenhague, 1919. Un vol. in-8° de 70 pages.

M. Zeuthen se sert de l'édition des *Éléments* d'Euclide donnée par Heiberg. C'est aussi celle que j'ai sous les yeux.

(2) Paris, Henry Agasse. An VII.

La lecture des auteurs originaux, voilà la source de ses connaissances. Mais, pour la période pré-euclidienne, cette méthode n'était plus praticable. A part quelques fragments, les ouvrages d'Hippocrate de Chios, de Théétète, d'Eudoxe et des géomètres leurs contemporains, n'existent plus. Les mathématiques grecques pré-euclidiennes eurent, il est vrai, un historien célèbre, Eudème de Rhodes, qui vécut pendant la période qui sépare Platon d'Euclide ; mais sa grande histoire a aussi péri.

Montucla atteignit, somme toute, les résultats auxquels il pouvait prétendre à l'aide des documents qu'il possédait. Sa méthode, d'ailleurs pour lui la seule possible, était excellente. Ce fut celle de Kaetner, dans sa *Geschichte der Mathematik* (1), et, pour une science sœur des mathématiques, la méthode de Delambre dans son *Histoire de l'Astronomie* (2). On n'a rien à lui reprocher. Pour réaliser des progrès, il fallait de nouveaux matériaux. Ils ne manquaient pas ; mais ils demandaient des travaux préparatoires qui tardèrent assez longtemps à fournir les documents à mettre en œuvre. L'histoire des mathématiques d'Eudème, nous venons de le rappeler, est perdue, et les Grecs ne nous en ont pas laissé, à proprement parler, d'autre. Mais on possède, en revanche, un ouvrage précieux, unique en son genre, qui contient de nombreux renseignements historiques : le *Commentaire de Proclus sur le premier livre des Éléments d'Euclide* (3). Nous y reviendrons. D'autres auteurs, notamment Platon, Aristote et Simplicius, sont, eux aussi, pleins d'allusions aux géomètres et à la géométrie ancienne. Mais, peut-être encore davantage que chez Proclus, ces allusions sont éparses et comme noyées dans des ouvrages dont elles ne font pas le sujet principal. Il fallait les en extraire, les grouper, les classer, travail de compilation auquel se livra Breitschneider, qui donna, en 1870, le résultat de ses recherches, dans : *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides* (4). Ce fut le point de départ de toutes les études ultérieures.

Breitschneider se hâta de profiter, le premier, des documents

(1) Göttingen, Johann Georg Rosenbusch, 1796-1800 ; en quatre volumes.

(2) J'ai surtout en vue les deux volumes consacrés à l'*Histoire de l'Astronomie Ancienne* ; Paris, Courcier, 1817. Mais on sait que Delambre a gardé la même méthode dans tous les volumes suivants de son *Histoire*.

(3) *Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum Commentarii*, ex recognitione Godofridi Friedlein. Lipsiae, in Aedibus B. G. Teubneri ; MDCCCLXXIII.

(4) Leipzig, Teubner, 1870.

qu'il venait d'accumuler, en écrivant une histoire de la géométrie grecque pré-euclidienne. Dans un sujet aussi neuf, son œuvre ne pouvait être définitive. Bon nombre des conclusions du professeur de Gotha, bien appuyées sur les pièces, ont cependant été adoptées sans restrictions et demeurent acquises; d'autres donnèrent lieu à de longues discussions.

Deux textes de la collection de Breitschneider appellent tout d'abord l'attention, tant par leur étendue que par leur importance intrinsèque : l'extrait de Simplicius sur les quadratures des lunules et le résumé historique de Proclus (1). Je n'ai pas à m'occuper aujourd'hui du premier de ces morceaux. M. Rudio l'a réédité à part, en 1907, dans un travail de bonne et solide érudition : *Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates* (2). En rendant compte de cet ouvrage dans la Revue (3), j'ai eu l'occasion de raconter les nombreuses et courtoises discussions auxquelles donna lieu l'établissement du texte. Il serait oiseux d'y revenir; mais il me faut insister sur le résumé historique de Proclus.

Pour la clarté, je prie le lecteur de ne pas perdre de vue quelques dates.

Proclus écrit en grec classique, mais c'est un Byzantin du sixième siècle de l'ère chrétienne. Euclide vivait trois cents ans environ avant Jésus-Christ; Platon, un peu moins d'un siècle avant Euclide; Pythagore, à peu près deux siècles avant Platon. Le résumé de Proclus rapporte donc des événements qui lui sont antérieurs de 800, 900, 1000 ans et plus. La vieille langue grecque classique, employée par l'auteur, risque de le faire oublier au lecteur.

Or, le résumé historique de Proclus est une de nos principales sources d'information sur les mathématiques pré-euclidiennes. C'est souvent même la seule. Quel crédit mérite-t-il? On voit l'importance du problème. Mais, pour le résoudre, il faut préalablement en élucider un autre : De quelles sources d'information, Proclus, si éloigné déjà des événements, disposait-il lui-même?

(1) Dans Breitschneider, l'extrait de Geminus se trouve pp. 100-121; le résumé historique de Proclus, pp. 27-31. Ce dernier se trouve dans l'édition de Friedlein, pp. 64-70.

(2) Leipzig, Teubner, 1907.

(3) T. LXV, janvier 1909, pp. 294-301. Les discussions n'ont pas été closes par l'édition de M. Rudio et M. Zeuthen, notamment, a repris le sujet dans un mémoire intitulé : *Sur les connaissances géométriques des Grecs avant la réforme Platonicienne*, publié dans le Bulletin de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark. Année 1913, pp. 431-473.

Un premier fait est certain. La plupart des traités et mémoires des mathématiciens grecs perdus aujourd'hui, l'étaient déjà à l'époque de Proclus. Il n'a pas pu, à la manière moderne de Montucla, travailler sur des écrits originaux; mais s'est servi de livres d'histoire. Il cite, entre autres, explicitement, un auteur du premier siècle avant Jésus-Christ, Simplicius, dont l'ouvrage est perdu depuis Proclus; cette circonstance nous empêche de résoudre avec certitude un doute des plus importants : Proclus avait-il aussi sous la main l'*Histoire des Mathématiques* d'Eudème de Rhodes? Simplicius s'en rapporte souvent à l'autorité d'Eudème. Quant à Proclus, lorsqu'il cite le Rhodien, il est toujours équivoque. Impossible de savoir si c'est Eudème lui-même, qu'il résume ou transcrit; ou bien seulement Eudème d'après Simplicius? On saisit la différence. Eudème, historien de première valeur, racontait des faits dont il était peu éloigné, souvent même le témoin. Simplicius, d'un mérite moindre, parle d'événements dont il est séparé par plusieurs siècles.

L'opinion la plus courante est que Proclus a eu Eudème lui-même sous les yeux, mais elle a rencontré un contradicteur convaincu et des plus sérieux : Paul Tannery. L'éminent éditeur de Diophante a consacré à la défense de sa thèse, une bonne partie de son *Histoire de la Géométrie grecque* (1). J'y renvoie le lecteur. Les arguments de Tannery, parfois un peu subtils, toujours ingénieux, ne manquent pas de poids, mais n'ont pas convaincu tout le monde. Entre autres, l'un des plus chauds amis, des plus grands admirateurs du savant français, Zeuthen, ne s'est pas laissé persuader. Et voici la conséquence de cette divergence de vues.

L'auteur, quel qu'il soit, cité par Proclus est un ardent platonicien, qui attribue à son chef d'École une influence décisive sur le développement des mathématiques. En cela Zeuthen est d'accord avec lui; tandis que Tannery trouve au contraire que l'auteur cité par Proclus exagère l'influence de Platon. Or la thèse de Tannery est insoutenable si cet auteur est Eudème; Tannery eût été le premier à le reconnaître. Cette thèse devient, au contraire, fort plausible si l'auteur est Simplicius. Le litige

(1) *La géométrie grecque. Comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons.* Essai critique par Paul Tannery. Première partie : *Histoire générale de la Géométrie élémentaire.* (C'est tout ce qui a paru.) Paris, Gauthier-Villars, 1887. Tiré à part d'une série d'articles qui ont été publiés dans le Bulletin des Sciences Mathématiques, de 1885 à 1887, 2e série, t. IX-XI, Paris, Gauthier-Villars.

reste pendant, et ne sera vraisemblablement jamais tranché, à moins que de nouvelles pièces versées au dossier ne viennent porter la lumière dans les débats.

Faut-il en désespérer ? Non, car les documents relatifs à la géométrie pré-euclidienne inutilisés jusqu'ici ne manquent pas ; mais ils sont dispersés un peu partout dans les ouvrages les plus divers, surtout dans ceux des philosophes. Breitschneider avait indiqué la voie à suivre pour les y trouver et les rendre utilisables : on s'y engagea. Le dépouillement des auteurs se poursuivit dans deux voies. Quelques érudits se maintenant sur le terrain philologique se contentèrent de recueillir tous les passages où un auteur déterminé parle des mathématiques. C'est ce que fit Heiberg, dans ses *Mathematisches zu Aristoteles* (1). D'autres, au contraire, cherchèrent à élucider une question spéciale, objet de leurs études : l'origine des connaissances des Grecs relatives aux incommensurables, par exemple. Ils relurent Platon, Aristote, d'autres encore, mus par l'espoir d'y rencontrer des éclaircissements. M. Vogt s'est distingué dans ce genre de recherches, et j'en ai jadis signalé ici quelques-unes (2). A tout prendre, la méthode de M. Heiberg vaut mieux. Elle divise le travail, économise les forces, permet d'obtenir, en collaboration, des résultats auxquels on ne saurait prétendre en travaillant isolément (3). Paul Tannery, lui-même, est peut-être l'exemple le plus frappant de la difficulté qu'il y a de mener de front avec maîtrise la philologie et les mathématiques. Personne ne discute sa compétence en géométrie. Elle lui permit, par exemple, de mettre en relief l'importance des trois postulats de construction

(1) Publié dans le t. XVIII des ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN, begründet von Moritz Cantor. Leipzig, Teubner, 1904 ; pp. 1-49.

(2) *Die Geometrie des Pythagoras*. BIBLIOTHECA MATHEMATICA, 3e série, t. IX, Leipzig, Teubner, 1908-1909 ; pp. 15-54.

Die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen nach Plato und anderen Quellen des 4. Jahrhunderts. BIBLIOTHECA MATHEMATICA, 3e série. t. X, 1909-1910, pp. 97-155. Voir au t. LXX de la REVUE mon Bulletin d'Histoire des Mathématiques de juin 1911, pp. 330-335.

Zur Entdeckungsgeschichte des Irrationalen. BIBLIOTHECA MATHEMATICA, 3e série, t. XIV, 1914-1915 ; pp. 9-29.

(3) Je rappellerai l'exemple si remarquable que Zeuthen lui-même en a donné à l'occasion de la découverte du traité *De la Méthode* par Archimède. Il publia avec M. Heiberg, dans la BIBLIOTHECA MATHEMATICA, 3e série, t. VII, pp. 321-363, *Eine neue Schrift von Archimedes*. La version allemande est de M. Heiberg, le commentaire, de Zeuthen.

placés par Euclide en tête du premier livre des *Éléments* (1). Mais Tannery faisait, à tort, beaucoup moins de cas des trois postulats analytiques, dont le rôle dans le plan d'Euclide a été si bien mis en évidence par notre regretté collègue Paul Mansion (2). Zeuthen, comme Mansion, est avant tout géomètre et cette réflexion m'amène à parler enfin de ses derniers travaux. Qu'on me pardonne la digression qui précède ; elle était indispensable pour comprendre la contribution du savant danois à l'histoire de la formation des *Éléments* d'Euclide.

Et d'abord, les conclusions importantes des travaux de Paul Tannery restent toutes debout après les travaux de Zeuthen. Quelques détails doivent être rectifiés ; mais, en outre, beaucoup de questions à peine effleurées par le savant français, ou même entièrement passées sous silence par lui, sont discutées et résolues par le savant danois. Or, voici à peu près en quel état Tannery laissait le problème de la formation des *Éléments* d'Euclide.

Une idée pythagoricienne domine tout le plan des *Éléments* ; c'est l'influence prépondérante des cinq polyèdres réguliers dans l'organisation de l'Univers. Euclide se propose donc d'étudier la nature de ces polyèdres ; de les décomposer jusque dans leurs premiers principes, dans leurs « éléments » les plus reculés, les plus simples. Tout ce qui peut y contribuer rentre dans le cadre de son ouvrage, le reste en est exclu. Et voilà l'explication d'une lacune, au premier abord pour nous fort étrange ; voilà, dis-je, pourquoi Euclide ne traite pas dans ses *Éléments* la théorie si importante des triangles sphériques. Au point de vue des polyèdres réguliers, il n'avait qu'en faire.

D'accord avec Tannery, Zeuthen admet aussi que les *Éléments* d'Euclide conservent l'empreinte profonde de l'ordre historique

(1) *Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide*. BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, 2e série, t. VIII, 1884 ; pp. 162-175.

Réédité dans : *Paul Tannery. Mémoires scientifiques publiés par J. L. Heiberg et H. G. Zeuthen. Sciences exactes dans l'Antiquité* ; t. II, 1883-1893. Toulouse, Edouard Privat. Paris, Gauthier-Villars. 1912. Pièce n° 31, pp. 48-63.

(2) Notamment dans ses *Premiers Principes de la Métagéométrie ou géométrie générale*. Résumé de conférences faites à l'Institut supérieur de Philosophie de Louvain, le 16 mai, le 30 mai et le 6 juin 1895. Publié en Appendice dans le t. XVI de MATHESIS. Gand, Hoste. Paris, Gauthier-Villars, 1896.

Paul Mansion a traité à maintes reprises le même sujet. Mais c'est dans cet article, me semble-t-il, qu'il l'expose le plus clairement pour tous ceux qui ne font pas des premiers principes de la métagéométrie une étude spéciale.

du développement de la science. Or, l'ordre historique fut, à peu de chose près, celui qui paraît à quelques savants de nos jours (1) devoir être l'ordre pédagogique : ne démontrer d'abord que ce qui ne se voit pas immédiatement ; la proposition du carré de l'hypoténuse, par exemple, ou celle de la somme des trois angles d'un triangle. Impossible, en effet, d'en apercevoir la vérité sans une construction. Bientôt après, mais en laissant toujours beaucoup à l'intuition, on montrera que certaines propositions, *qui se voient,* découlent cependant nécessairement d'autres déjà admises ; telle, l'égalité des angles opposés par le sommet ; telles encore, plusieurs propriétés intuitives des figures égales, mais différentes par leur échelle de construction. J'évite à dessein le mot « semblable », car c'est bien sous le concept primitif et fruste de figure égale à une autre, mais de taille différente, que beaucoup d'ouvriers se représentent, encore aujourd'hui, une épure ou un tableau.

Euclide rejette visiblement la théorie de la similitude le plus loin possible. Pourquoi ? Pour conserver l'ordre traditionnel, répondent Tannery et Zeuthen. Ce plan, qu'Euclide eût sans doute pu changer, avait été imposé aux premiers auteurs d'« éléments », Hippocrate de Chios et ses émules, par la succession des découvertes. Pythagore avait reconnu l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré. Véritable « scandale logique » pour l'esprit clair et rigoureux des Grecs, dit quelque part Paul Tannery. Ce scandale eut son contre-coup immédiat dans les premiers essais d'« éléments ». Pour leurs auteurs, la géométrie plane se divisait naturellement en deux parties : celle qui était indépendante du paradoxe de l'incommensurabilité ; celle qui le supposait nécessairement. La première de ces parties comprenait la matière des quatre premiers livres d'Euclide, c'est-à-dire, la théorie de la ligne droite, les commencements de l'algèbre géométrique, la théorie du cercle et celle des polygones réguliers. La seconde partie était consacrée à la similitude. Les deux parties de la géométrie plane restèrent séparées comme par un fossé infranchissable jusqu'à Platon.

C'est au sujet de l'action du philosophe d'Athènes sur la géométrie que Zeuthen s'écarte le plus de Tannery : Zeuthen reconnaît une influence platonicienne profonde; Tannery la minimise. Mais leurs avis diffèrent-ils bien autant qu'il semblerait à pre-

(1) Voir, p. ex., *Leerboek der Planimetrie*, door N. L. W. A. Gravelaar. Groningen, J.-B. Wolters, 1907.

mière vue ? S'il s'agit de la personnalité de Platon, oui. S'il s'agit du développement effectif réalisé alors par la géométrie, non. Cette question d'influence d'école, très intéressante pour le philosophe et l'historien, l'est, me semble-t-il, un peu moins pour le géomètre. Quoi qu'il en soit, personne n'a jamais révoqué en doute les connaissances mathématiques de Platon. A preuve, dès l'antiquité, l'ouvrage de Théon de Smyrne (1). Mais, encore une fois, d'après Proclus, suivi en cela par Zeuthen, Platon fut un géomètre de génie, un initiateur, un maître qui révolutionna la science; d'après Tannery, au contraire, les connaissances mathématiques de Platon furent un peu quelconques.

Mais voici bientôt Zeuthen et Tannery de nouveau d'accord pour nous dire qu'à l'époque de Platon de grands progrès furent dus à Eudoxe de Cnide et à Théétète. Cependant, d'après Zeuthen, et contrairement à l'opinion de Tannery, les deux savants grecs n'auraient écrit que sous l'impulsion de Platon. De son coup d'œil d'aigle, le fondateur de l'Académie aurait entrevu que la géométrie pouvait devenir une science parfaite de logique pure ; science reposant tout entière sur des définitions, des postulats, des axiomes explicitement formulés ; science se développant ensuite majestueusement sans aucun appel ultérieur à l'intuition ou à l'expérience.

Si Platon ne proposa pas ce programme aux méditations de ses élèves, comme le croit Zeuthen, il est cependant incontestable que l'idée, d'où qu'elle vienne, est à la base des recherches d'Eudoxe et de Théétète.

En effet, impulsion directe imprimée à Eudoxe par Platon, ou simple influence latente du milieu ambiant, le résultat fut que deux grands progrès se réalisèrent par le Cnidien. On lui doit, au témoignage formel d'Archimède (2), la démonstration rigoureuse de l'expression du volume de la pyramide et du cône. On sait aussi, à n'en pas douter, par le témoignage d'un scoliaste ancien, mais anonyme, des *Éléments* d'Euclide, que le Cnidien

(1) *Theonis Smyrnaei philosophi Platonici expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium*, recensuit Eduardus Hiller. Lipsiae, in Aedibus B. G. Teubneri ; MDCCCLXXVIII.

Théon de Smyrne, contemporain de Claude Ptolémée, vivait au II^e siècle de notre ère.

(2) Dans la lettre d'Archimède à Dosithée, que le Syracusain mit en guise de Préface, en tête du traité *De Sphaera et Cylindro*. *Archimedis Opera omnia cum commentariis Eutocii*, iterum edidit J. L. Heiberg ; t. I. Lipsiae, in Aedibus B. G. Teubneri, MDCCCCX ; pp. 2-5.

donna une théorie complète et correcte des proportions, valable aussi bien pour les nombres irrationnels que pour les nombres commensurables. Dans leurs grandes lignes, les deux découvertes d'Eudoxe forment aujourd'hui la matière des livres XII et V des *Éléments* d'Euclide. Ce livre V est l'un des chefs-d'œuvre de la mathématique grecque. En quoi consistait au juste le progrès réalisé par Eudoxe? En ceci, vraisemblablement du moins, car les témoignages péremptoires nous manquent: pour démontrer leurs théorèmes sur les nombres, Pythagore et ses successeurs se servirent longtemps de collections de points discontinus. C'est ce que nous faisons volontiers encore au commencement de nos traités d'arithmétique pour expliquer aux enfants les premières opérations. Mais les Pythagoriciens se butèrent longtemps, quand, à l'aide de ces points, ils cherchèrent à étendre les opérations fondamentales au calcul des radicaux. Jamais ils ne parvinrent à tourner la difficulté comme nous le ferions maintenant. Aux points discontinus, Eudoxe substitua des segments de droites continus, grâce auxquels il put donner des démonstrations générales, s'étendant à tous les nombres réels, rationnels ou non.

De nos jours, on a épuisé les formes de la louange pour célébrer le V[e] livre d'Euclide, le livre des proportions d'Eudoxe, comme, entre historiens des mathématiques, il est de bon ton de le nommer. Plus que tout autre, Zeuthen en a mis en lumière le mérite. Faut-il rappeler que pour bien des géomètres, et non des moindres, ce beau livre fut longtemps un livre fermé ? Les commentaires annexés aux anciennes éditions d'Euclide sont instructifs sous ce rapport. L'un des plus illustres continuateurs de Grégoire de Saint-Vincent, André Tacquet, par exemple, avoue sans vergogne qu'il ne comprend rien aux définitions de l'égalité et de l'inégalité de deux rapports données par le géomètre d'Alexandrie (1). Ces définitions nous paraissent, à nous, limpides. Mais, à notre tour, ayons la franchise de le reconnaître, c'est surtout grâce au commentaire que Zeuthen en a donné autrefois dans son *Histoire des Mathématiques dans l'Antiquité et au Moyen-Age* (2), qu'on a universellement reconnu combien ces définitions sont naturelles, exactes et profondes.

(1) *Elementa geometriae planae ac solidae, quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata*, auctore Andrea Tacquet Societatis Jesu sacerdote et matheseos professore... Editio tertia. Antverpiae, apud Jacobum Meursium, M. DC. LXXII (dans l'introduction au livre V, p. 128).

(2) Edition française, revue et corrigée par l'auteur. Traduite par Jean Mascart. Paris, Gauthier-Villars, 1902. *Les mathématiques grecques*, ch. 16, intitulé : *La théorie générale des proportions, cinquième et sixième livre d'Euclide*, pp. 114-117.

Venons-en à Théétète. D'après Proclus, sa contribution au développement de la géométrie serait comparable à celle d'Eudoxe (1). Nous n'avons plus Archimède, ni le scoliaste d'Euclide pour nous apprendre en quoi elle consistait. On s'accorde, cependant, pour attribuer à Théétète des progrès sérieux dans la solution du problème des incommensurables. Mais il paraît surtout avoir parachevé la théorie des polyèdres réguliers.

Cette théorie des polyèdres réguliers couronne les *Éléments* d'Euclide, dont elle forme le livre XIII et dernier. Ce livre est des plus curieux. Mieux que tous les autres, il conserve la trace visible de la manière dont Euclide utilisa ses devanciers pour composer son propre ouvrage. Les polyèdres réguliers appartiennent essentiellement, cela va de soi, à la géométrie solide. Eh bien ! le livre XIII débute par cinq propositions de géométrie plane relatives aux polygones, dont ce n'était à aucun point de vue la place naturelle. Et l'explication de cette anomalie ? Tout simplement ceci : Euclide trouva les cinq propositions à cette même place chez Théétète. Elles n'étaient pas courantes ; elles étaient peut-être même tout à fait neuves pour Théétète. Celui-ci en avait besoin pour ses démonstrations. Écrivant ce que nous nommerions aujourd'hui un « Mémoire » sur les polyèdres réguliers, il plaça naturellement les propositions en tête de son mémoire. Euclide les y trouva et les y conserva.

D'aucuns se sont autorisés de ce mode de travail d'Euclide pour chercher à rapetisser l'immortel géomètre. Zeuthen combat avec énergie et conviction cette manière de voir. Il a raison. Oui, Euclide a utilisé les travaux de ses prédécesseurs. Oui, il les a encadrés dans ses *Éléments,* mais il l'a fait de la manière indiquée par Proclus, c'est-à-dire, en géomètre incomparable qui revoit les travaux existant avant les siens, leur imprime une marque personnelle, en retouche les démonstrations et leur donne à toutes une rigueur irréprochable (2). N'est-ce point là encore, pour écrire les manuels de classe, la méthode de nos plus grands maîtres ?

Un dernier mot. La lecture des *Éléments* d'Euclide, dit Zeuthen, demande « un œil ouvert aux vues scientifiques ». Elle exige aussi, ajoute-t-il, « soit une préparation scientifique préalable, soit l'aide d'un professeur, non seulement au courant des

(1) On sait que Platon donna le nom de Théétète à l'un de ses dialogues.

(2) C'est principalement dans le chapitre XV de sa *Reforme des Mathématiques de Platon à Euclide*, que Zeuthen développe les conclusions que je résume ici. Ce chapitre est intitulé *Euclide et ses Éléments*, p. 180.

démonstrations, mais pénétré de l'esprit des méthodes ». En traçant ces lignes, Zeuthen songeait aux successeurs immédiats d'Euclide ; mais, pour ma part, je n'ai pu m'empêcher, en les lisant, de les appliquer au professeur de Copenhague lui-même. Quel guide merveilleux ! Quel puissant initiateur et comme il nous manquera désormais ! La mort vient de le frapper inopinément, le 6 janvier dernier, dans la 81e année de son âge. Il avait pour les *Éléments* d'Euclide cette admiration enthousiaste, qui animait notre regretté Paul Mansion, quand il me parlait du chef-d'œuvre du géomètre d'Alexandrie. « Il manque toujours quelque chose à un mathématicien qui n'a pas approfondi Euclide », me disait un jour Mansion. J'en suis convaincu. Mais, comme tous les autres, pour comprendre Euclide, j'ai eu besoin d'un guide. Personne ne m'a plus aidé que Zeuthen par l'ensemble de ses travaux !

H. Bosmans, S. J.

IV

NOS EAUX MINÉRALES

Outre les éléments constitutifs de l'air atmosphérique, les eaux contiennent généralement en dissolution de nombreuses substances empruntées aux terrains qu'elles ont traversés. C'est le règne minéral qui y est le plus abondamment représenté. Aussi emploie-t-on souvent en hydrologie le terme « minéralisation » pour désigner, en général, la proportion de matières dissoutes, organiques ou inorganiques, quoiqu'on vise spécialement ces dernières.

Dans la minéralisation, on distingue le *degré*, donné par l'élévation de la teneur en substances dissoutes ; puis, lorsque le degré est relativement élevé, on note le *genre*, déterminé par la nature des principes acides prédominants, ainsi que l'*espèce*, caractérisée par la nature des principaux éléments basiques.

De tout temps et dans tous les pays, on a remarqué les relations qui existent entre la constitution géologique et minéralogique du sous-sol et l'état de minéralisation naturelle des eaux. Toutefois, il a été reconnu que les proportions des matières dissoutes dépendent principalement des conditions dans lesquelles l'eau a été élaborée au contact des terrains.

Les eaux météoriques qui pénètrent dans les couches du sous-sol y subissent une oxydation : les matières organiques recueillies dans l'air et dans le sol sont transformées en acide carbonique, en acide sulfurique, en acide azotique, etc. De leur côté, certains éléments des terrains, organiques ou minéraux, fournissent, par oxydation, des acides (carbonique, sulfurique, etc.) que l'eau entraîne. L'eau, par elle-même ou à l'aide de ces principes acides, dissout une proportion plus ou moins forte de matières humiques et d'éléments minéraux (acide carbonique libre, sels alcalins et alcalino-terreux, sels de fer, etc.), suivant la composition du terrain, le degré de solubilité de ses éléments, l'épaisseur de la couche traversée, sa porosité, son état de division, la durée du contact, la température et la pression régnantes. C'est ainsi que certaines eaux de terrains salés ou gypseux sont totalement saturées de chlorure sodique ou de sulfate calcique ; que les eaux des nappes captives et profondes sont, d'ordinaire, assez fortement chargées d'éléments minéraux, tandis que celles des nappes phréatiques et particulièrement les eaux vives des sources alimentées par ces nappes, contiennent généralement assez peu de matières dissoutes.

L'échelle des degrés de minéralisation totale est établie à peu près comme suit par la plupart des hydrologues :

La teneur en matières dissoutes est considérée comme *extrêmement faible* en dessous de 250 à 300 milligrammes par litre ;
comme *très faible*, de 300 à 600 milligr. environ ;
comme *faible*, de 600 à 2000 ;
comme *moyenne*, de 2000 à 6000 ;
comme *forte*, de 6000 à 20 000 ;
comme *très forte*, au delà de 20 000.

Les matières dissoutes totales consistent principalement en carbonates, en sulfates et en chlorures de sodium, de calcium, de magnésium, de fer, en acide carbonique libre, etc.

En ce qui concerne le degré de minéralisation totale des eaux belges, une enquête instituée en 1893 par le département de l'Agriculture (1) a fait connaître qu'il y a lieu d'établir certaines distinctions :

D'une part, au point de vue de la nature des terrains :

(1) *Enquête sur les eaux alimentaires ; Ministère de l'Agriculture*, 2 vol., 1902 et 1906. — Les eaux alimentaires de Belgique Revue des Questions scientifiques, janvier 1907.