Universités Américaines, apporter sa part contributive au relèvement de vos ruines. Elles furent et demeurent celles de la Science et de la Vérité.

Monsieur le Chanoine, au nom de tous vos auditeurs, j'ai encore à vous remercier de votre belle conférence sur les *Progrès et les Tendances de l'Évolution végétale*. Avec justesse et mesure, avec un tact exquis, vous nous avez montré où et jusqu'à quel point l'on peut admettre cette évolution. Merci de ces lumières si sûres et de ces conclusions si fermes, que votre compétence tire allégrement d'une culture très approfondie de la matière vivante.

Messieurs de la Société scientifique de Bruxelles, c'est vers votre devise que nous reportait constamment Monsieur le Chanoine en sa conférence : *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest* (1). A cette tâche d'établir et de maintenir la concordance entre les données de la foi et celles de la raison, vous vous dévouez courageusement. Vous êtes et demeurez convaincus que Dieu, créateur des mondes, ne peut tenir un langage d'opposition vraie, quand Il nous parle dans les mondes exposés à nos regards ou quand Il nous parle dans la manifestation de la foi révélée. Soyez félicités et remerciés, Messieurs, de cette direction donnée à vos labeurs et à votre Association elle-même. Elle est sûre : elle est absolue. Une fois encore, je vous sais gré d'être venus nous le rappeler éloquemment, et par votre conférence, et par le geste de votre session. Je vous souhaite, Messieurs, dans nos milieux scientifiques de fidèles imitateurs, de courageux collaborateurs, de nombreux adhérents. Parmi ces derniers, veuillez me permettre d'inscrire aujourd'hui mon nom. Et vienne bientôt le jour où nous pourrons vous rendre votre visite, mais à Louvain! Louvain, sortie de ses ruines en un superbe vêtement d'architecture gothique, à Louvain ressuscitée dans une nouvelle jeunesse et avec de belles énergies pour l'expansion et la défense de la vérité divine.

(Applaudissements prolongés.)

(1) Denzinger-Banwart, *Enchiridion*, n° 1797.

SESSION DU 27 JANVIER 1921

A BRUXELLES

—

SÉANCES DES SECTIONS

—

Première Section

—

M. Goedseels, président de la Section, et qui a présenté à la dernière session une *Étude sur les coordonnées polaires*, donne lecture du rapport de M. d'Ocagne sur ce travail. M. d'Ocagne estime que le mémoire, abrégé dans certaines de ses parties, sera digne d'être inséré dans les ANNALES. Après une discussion à laquelle prennent part M. Pasquier, le R. P. Bosmans, MM. de la Vallée Poussin et Dutordoir, M. Goedseels fait connaître son intention de reprendre son mémoire en vue de donner, dans la mesure du possible, satisfaction aux observations présentées.

Le R. P. Bosmans fait la communication suivante : *Sur une lettre inédite de Fermat, publiée par M. Giovannozzi* (1).

M. de Waard nous a donné récemment des lettres inédites de Fermat que j'ai signalées dans mon dernier *Bulletin d'Histoire des Mathématiques* de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES (2). Je disais alors que le savant hollandais avait découvert encore

(1) Pierre de Fermat, *Una lettera inedita*. ARCHIVIO DI STORIA DELLA SCIENZA, t. I, Rome, 1919, pp. 137-140. Cette pièce est celle qui est signalée par Charles Henry et Paul Tannery comme perdue : Note 2 du bas de la page 253 du tome II de leur édition des *œuvres de Fermat*, Paris, Gauthier-Villars, 1894.

(2) Juillet 1920, t. LXXVIII, pp. 291-292.

d'autres lettres de Fermat et qu'il se proposait de les mettre au jour dès que les circonstances le permettraient. Mais les circonstances sont difficiles, peu favorables à la publication de documents inédits, et rien ne faisant luire l'espoir de voir les temps bientôt s'améliorer, M. Giovannozzi, qui a trouvé la lettre actuelle sur les indications de M. de Waard, s'est décidé à l'éditer isolément, en attendant qu'elle fasse partie d'une collection plus complète.

Cette pièce n'est pas un autographe, mais une copie contemporaine conservée à la Bibliothèque Nationale de Florence. Écrite en avril 1643, elle est adressée à Mersenne pour être transmise à Brulart de Saint-Martin, conseiller d'État, à Paris. Dans le billet séparé d'envoi, daté du 7 avril 1643, qui accompagne la pièce, Fermat dit au Minime (1) : Je vous écris cette lettre « à la hâte, comme vous verrez. Qu'il n'en soit pas fait de copie et qu'elle ne sorte pas d'entre les mains de M. de Brulart ». Elle est, en effet, écrite dans ce style de premier jet, propre à Fermat, qui le rendait parfois si dur à comprendre par ses contemporains.

La lettre publiée par M. Giovannozzi est un document intéressant relatif aux discussions soulevées par la méthode *De Maximis et Minimis* de Fermat. Du vivant de l'auteur, cette méthode circulait en manuscrit, sous la forme d'un petit traité fort court, qui tient tout entier en quatre pages, dans l'édition des *Œuvres de Fermat,* par Charles Henry et Paul Tannery (2). Le Toulousain y énonce d'abord sa règle. Pour l'intelligence de ce qui suit, il importe d'en rappeler les termes, et de noter les obscurités qu'ils renferment. Voici donc les propres paroles de Fermat, non pas, il est vrai, dans le texte original latin, mais dans la version française très littérale, que Paul Tannery a jointe à ce texte au tome III des *Œuvres de Fermat* (3).

« Soit a une inconnue quelconque de la question (qu'elle ait une, deux ou trois dimensions, suivant qu'il convient d'après l'énoncé). On exprimera la quantité maxima ou minima en a, au

(1) Œuvres de Fermat, t. II, p. 253.
(2) T. I, Paris, Gauthier Villars, 1891, pp. 133-136.
(3) Paris, Gauthier-Villars, 1896, p. 121.

moyen de termes qui pourront être de degrés quelconques. On substituera ensuite $a + e$ à l'inconnue primitive a, et on exprimera ainsi la quantité maxima ou minima en termes où entreront a et e à des degrés quelconques. On *adégalera,* pour parler comme Diophante, les deux expressions de la quantité maxima ou minima, et on retranchera les termes communs de part et d'autre. Cela fait, il se trouvera que de part et d'autre tous les termes seront affectés de e ou d'une de ses puissances. On divisera tous les termes par e ou par une puissance de e d'un degré plus élevé, de façon que dans l'un au moins des termes de l'un quelconque des membres e disparaisse entièrement. On supprimera ensuite tous les termes où entrera encore e ou l'une de ses puissances et l'on égalera les autres, ou bien, si dans l'un des membres il ne reste rien, on égalera, ce qui revient au même, les termes en plus aux termes en moins. La résolution de cette dernière équation donnera la valeur de a, qui conduira au maximum ou au minimum, en reprenant sa première expression ».

Fermat ne dit pas comment un maximum se distingue d'un minimum. Mais, à part ce détail, c'est bien, en style du XVIIe siècle, la règle telle que nous l'appliquons aujourd'hui.

Tenons-nous-en à l'énoncé original. Il renferme deux points principaux, dont à première vue les contemporains n'apercevaient guère la raison. De quel droit peut-on *adégaler*, comme Fermat dit qu'il faut le faire, c'est-à-dire, poser

$$f(a) = f(a + e)\,?$$

Ensuite, après avoir réduit les termes semblables et divisé tous les termes restants par la plus haute puissance de e commune à tous les termes, de quel droit peut-on négliger ceux qui contiennent encore e ?

On sait que, dans le traité *De Maximis et Minimis*, l'énoncé de la règle n'est accompagné d'aucune preuve ni explication quelconque. Pour tout éclaircissement, le Toulousain applique sa méthode à deux exemples. Le premier, quoique énoncé en termes différents, revient à la recherche de l'aire maxima d'un rectangle dont le périmètre est constant. Le second est le célèbre emploi de la règle *De Maximis et Minimis* imaginé par Fermat pour la détermination des tangentes. Cette application donna lieu à la retentissante querelle de Fermat et de Descartes, sur laquelle je n'ai pas à m'arrêter ici [1].

Ces deux exemples, il faut le reconnaître, répandent sur le sujet une lumière fort insuffisante. A preuve, nous venons de le dire, Descartes lui-même qui n'y vit pas clair et s'irrita.

Mais tous les savants n'avaient pas l'humeur batailleuse du philosophe. Tous ne partaient pas immédiatement en guerre contre l'auteur d'un théorème qu'ils ne comprenaient pas. Brulart de Saint-Martin n'avait pas mieux vu que Descartes la raison de la règle de Fermat. Loin de se fâcher, cependant, il fit ingénument à Mersenne l'aveu de son ignorance, et le pria de demander des éclaircissements à l'auteur [2]. C'est la réponse de Fermat que M. Giovannozzi vient de publier.

« Mon invention *De Maximis et Minimis,* dit Fermat, n'a que deux ou trois fondements. Je suppose premièrement que cette recherche aboutit à un point ou à un terme unique. »

L'idée est correcte, fort claire grâce à l'exemple qui y est ajouté. Mais l'expression n'a pas encore la précision ni l'élégance que nous lui donnons aujourd'hui. Fermat veut dire, que le point $a + e$ doit être pris dans le voisinage *immédiat* du point a.

« Il faut donc, continue-t-il, chercher un point unique au delà et au deçà duquel tous les termes de la question soient, ou toujours plus grands, ou toujours plus petits, que celuy qui sera produit par le terme cherché. »

Pour résoudre ce problème, Fermat commence par expliquer pourquoi il pose [3]

$$f(a) = f(a + e).$$

[1] Récemment encore, la question a été bien traitée par M. G. Milhaud, dans un article intitulé : *La querelle de Descartes et de Fermat au sujet des tangentes*, publié dans la REVUE GÉNÉRALE DES SCIENCES PURES ET APPLIQUÉES ; t. XXVIII, Paris, Doin, 1917, pp. 332-337. J'ai rendu compte du travail de M. G. Milhaud dans mon *Bulletin d'Histoire des Mathématiques* cité ci-dessus, pp 289-291.

[2] Pour plus de détails sur les obscurités de la règle de Fermat, voir l'excellente note publiée par M. A. Aubry dans le tome IV des *œuvres de Fermat*, Paris, Gauthier-Villars, 1912, pp 222-227. Note XXV, intitulée : Sur l'histoire du calcul infinitésimal pendant les années 1638-1639.

[3] Il est clair que les notations modernes $f(a)$, $f(a + e$, dont je me sers, pour la clarté, ne se trouvent pas dans le texte de Fermat.

Il faut écrire cette égalité, d'après lui, parce que si $f(a)$ a un maximum ou un minimum pour une valeur donnée de a, il s'ensuit que $f(a)$ doit être supérieur, ou inférieur, *à la fois* à $f(a + e)$ et à $f(a - e)$. Or, cela n'est possible que pour autant que l'on puisse écrire

$$f(a + e) = f(a - e).$$

Dans cette égalité tous les termes indépendants de e, donc tous les termes de $f(a)$ [1], se détruisent, ainsi que tous les termes de degrés pairs en e. Fermat l'explique en traitant en détail l'exemple suivant : Trouver le maximum de

$$f(a) = ba^2 - a^3,$$

où b est une constante.

Fermat élucide ensuite le second point obscur que nous avons signalé ci-dessus. Après avoir divisé tous les termes par la plus haute puissance de e commune à tous les termes, de quel droit néglige-t-on ceux qui contiennent encore e ?

C'est, répond Fermat, que ces termes négligés « ne peuvent changer l'ordre de l'équation de quelque signe qu'elle soit ».

Nous exprimerions aujourd'hui cette idée sous la forme suivante : C'est que, pour des valeurs suffisamment petites de e, un polynome rationnel et entier en e finit par prendre le signe du terme indépendant de e. Fermat est le premier, je crois, à en faire la remarque.

Si je voulais m'en tenir strictement au texte du Toulousain, — et peut-être ne serait-ce pas inutile pour se rendre compte de certaines difficultés qu'on y rencontre, — je devrais observer que dans sa lettre à Brulart de Saint-Martin, Fermat, qui travaille vite, a quelque peu perdu de vue les termes de l'énoncé de sa règle. Il y disait, qu'après la réduction des termes semblables, il fallait diviser les termes restants par la plus haute puissance de e commune à tous les termes. Il oublie cette division. En conséquence, au lieu de dire que les termes indépendants de e donnent leur

[1] Suivant son habitude, Fermat ne tire pas *explicitement* de son raisonnement une conclusion aussi simple.

signe au polynome, il explique pourquoi il suffit, pour connaître ce signe, de tenir compte des termes du degré en e le moins élevé, ce qui revient évidemment au même.

L'application que Fermat fait de ce principe à l'exemple déjà cité

$$f(a) = ba^2 - a^3$$

revient à dire, mais en style du XVII^e siècle et avec les ellipses coutumières à l'auteur quand il est pressé : Deux polynomes rationnels et entiers en e ne peuvent être égaux pour des valeurs arbitrairement petites de e que s'ils sont composés identiquement des mêmes termes.

Fermat annonce, enfin, « qu'il va donner une clef pour déterminer le plus grand et le plus petit », autrement dit, pour savoir si on a affaire à un maximum ou à un minimum. En effet, si la différence $f(a \pm e) - f(a)$ est dans les deux cas négative, il y a d'après lui maximum ; si elle est positive, il y a minimum (1). Cette remarque est neuve, car, nous en avons fait plus haut l'observation, Fermat, dans l'énoncé de sa règle, ne donne pas le critérium par lequel un maximum se distingue d'un minimum. A son ordinaire, il regarde cette indication comme superflue et croit son lecteur trop perspicace pour en avoir besoin. C'est qu'ici, comme toujours, Fermat est un pur amateur, qui n'écrit pas pour le grand public, ne rédige pas en vue de l'impression, mais s'adresse exclusivement à trois ou quatre des savants les plus distingués de l'Europe.

Résumons. La lettre publiée par M. Giovannozzi nous donne sous une forme encore assez diffuse, il est vrai, l'énoncé, probablement le plus ancien, d'un théorème important de la théorie

(1) C'est évidemment ainsi qu'il faut comprendre Fermat. Le texte conservé dans la copie manuscrite de Florence, est ici visiblement défectueux et offre des lacunes. Mais si les fragments perdus de ce texte nous obligent à y suppléer pas des conjectures, la conclusion finale du raisonnement de Fermat, qui nous a été conservée, ne laisse guère de doutes sur le sens des passages qui doivent être reconstitués. « Car, dit le Toulousain, si le terme marqué + est moindre que le terme marqué —, en ce cas la proposition aboutit à la recherche de la plus grande (c. à d. d'un maximum). Que si le terme marqué + est plus grand que le terme marqué —, en ce cas la question sera de la plus petite (c. à d. d'un minimum.)

des polynomes. Elle ajoute à la règle de Fermat le moyen de distinguer un maximum d'un minimum. Enfin et surtout, elle contient une démonstration rigoureuse du théorème de Fermat, par Fermat lui-même. Dans cette démonstration il convient, semble-t-il, de remarquer d'une manière spéciale, qu'en remplaçant l'égalité approchée

$$f(a) = f(a + e)$$

par l'égalité rigoureuse

$$f(a + e) = f(a - e),$$

Fermat introduit lui-même, dans sa méthode, la correction que nous y apportons pour la rendre irréprochable. En *pratique* les deux égalités précédentes conduisent au même résultat.

On le voit, la lettre à Brulart de Saint-Martin est tout à fait digne du grand Toulousain qui l'écrivit.

Le P. Bosmans fait ensuite les observations suivantes sur *La nouvelle édition des œuvres de Torricelli.*

La nouvelle édition des *Œuvres d'Evangéliste Torricelli* (1) se

(1) Opere di Evangelista Torricelli edite in occasione del III centenario della nascita col concorso del comune di Faenza da Gino Loria e Giuseppe Vassura. Volume I : Geometria, pubblicato per cura di Gino Loria. Parte I. Con il ritratto di E. Torricelli e 373 figure. Faenza, Stabilimento tipo-litografico G. Montanari, 1919. Un volume in-8° de XXXVIII, 407 pages et un portrait de Torricelli hors texte.

Opere di Evangelista Torricelli.... Volume I : Geometria, pubblicato per cura di Gino Loria. Parte II. Con 567 figure e 2 tavole litograficate. Faenza... 1919. Un vol. de (IV) 482 pages et 2 fac-similés des manuscrits de Torricelli hors texte.

Opere di Evangelista Torricelli... Volume II : Lezioni academiche. Mecanica. Scritti varii. Con 250 figure e 4 tavole litograficate, pubblicato per cura di Giuseppe Vassura. Faenza .. 1919. Un vol. de (IV) 320 pages et 4 planches hors texte.

Opere di Evangelista Torricelli... Volume III : Racconto d'alcuni problemi. Carteggio scientifico, con 260 figure ed alcuni facsimile di autografi, pubblicato per cura di Giuseppe Vassura. Faenza... 1919. Un vol. de (IV) et 521 pages.

Les communications étaient récemment encore si difficiles entre Faenza et la Belgique, que je désespérais d'entrer en possession des Œuvres de Torricelli. Je dois les plus vifs remerciements à Monseigneur Ogno Serra, Auditeur de la Nonciature Apostolique à Bruxelles, dont l'aimable intervention auprès des autorités italiennes est parvenue à aplanir toutes les difficultés du transport.