signe au polynome, il explique pourquoi il suffit, pour connaître ce signe, de tenir compte des termes du degré en $e$ le moins élevé, ce qui revient évidemment au même.

L'application que Fermat fait de ce principe à l'exemple déjà cité

$$f(a) = ba^2 - a^3$$

revient à dire, mais en style du XVII<sup></sup>e siècle et avec les ellipses coutumières à l'auteur quand il est pressé : Deux polynomes rationnels et entiers en $e$ ne peuvent être égaux pour des valeurs arbitrairement petites de $e$ que s'ils sont composés identiquement des mêmes termes.

Fermat annonce, enfin, « qu'il va donner une clef pour déterminer le plus grand et le plus petit », autrement dit, pour savoir si on a affaire à un maximum ou à un minimum. En effet, si la différence $f(a \pm e) - f(a)$ est dans les deux cas négative, il y a d'après lui maximum ; si elle est positive, il y a minimum (1). Cette remarque est neuve, car, nous en avons fait plus haut l'observation, Fermat, dans l'énoncé de sa règle, ne donne pas le critérium par lequel un maximum se distingue d'un minimum. A son ordinaire, il regarde cette indication comme superflue et croit son lecteur trop perspicace pour en avoir besoin. C'est qu'ici, comme toujours, Fermat est un pur amateur, qui n'écrit pas pour le grand public, ne rédige pas en vue de l'impression, mais s'adresse exclusivement à trois ou quatre des savants les plus distingués de l'Europe.

Résumons. La lettre publiée par M. Giovannozzi nous donne sous une forme encore assez diffuse, il est vrai, l'énoncé, probablement le plus ancien, d'un théorème important de la théorie

(1) C'est évidemment ainsi qu'il faut comprendre Fermat. Le texte conservé dans la copie manuscrite de Florence, est ici visiblement défectueux et offre des lacunes. Mais si les fragments perdus de ce texte nous obligent à y suppléer pas des conjectures, la conclusion finale du raisonnement de Fermat, qui nous a été conservée, ne laisse guère de doutes sur le sens des passages qui doivent être reconstitués. « Car, dit le Toulousain, si le terme marqué + est moindre que le terme marqué —, en ce cas la proposition aboutit à la recherche de la plus grande (c. à d. d'un maximum). Que si le terme marqué + est plus grand que le terme marqué —, en ce cas la question sera de la plus petite (c. à d. d'un minimum.)



des polynomes. Elle ajoute à la règle de Fermat le moyen de distinguer un maximum d'un minimum. Enfin et surtout, elle contient une démonstration rigoureuse du théorème de Fermat, par Fermat lui-même. Dans cette démonstration il convient, semble-t-il, de remarquer d'une manière spéciale, qu'en remplaçant l'égalité approchée

$$f(a) = f(a + e)$$

par l'égalité rigoureuse

$$f(a + e) = f(a - e),$$

Fermat introduit lui-même, dans sa méthode, la correction que nous y apportons pour la rendre irréprochable. En *pratique* les deux égalités précédentes conduisent au même résultat.

On le voit, la lettre à Brulart de Saint-Martin est tout à fait digne du grand Toulousain qui l'écrivit.

Le P. Bosmans fait ensuite les observations suivantes sur *La nouvelle édition des œuvres de Torricelli.*

La nouvelle édition des *Œuvres d'Evangéliste Torricelli* (1) se

(1) Opere di Evangelista Torricelli edite in occasione del III centenario della nascita col concorso del comune di Faenza da Gino Loria e Giuseppe Vassura. Volume I : Geometria, pubblicato per cura di Gino Loria. Parte I. Con il ritratto di E. Torricelli e 373 figure. Faenza, Stabilimento tipo-litografico G. Montanari, 1919. Un volume in-8° de XXXVIII, 407 pages et un portrait de Torricelli hors texte.

Opere di Evangelista Torricelli.... Volume I : Geometria, pubblicato per cura di Gino Loria. Parte II. Con 567 figure e 2 tavole litograficate. Faenza... 1919. Un vol. de (IV) 482 pages et 2 fac-similés des manuscrits de Torricelli hors texte.

Opere di Evangelista Torricelli... Volume II : Lezioni academiche. Mecanica. Scritti varii. Con 250 figure e 4 tavole litograficate, pubblicato per cura di Giuseppe Vassura. Faenza .. 1919. Un vol. de (IV) 320 pages et 4 planches hors texte.

Opere di Evangelista Torricelli... Volume III : Racconto d'alcuni problemi. Carteggio scientifico, con 260 figure ed alcuni facsimile di autografi, pubblicato per cura di Giuseppe Vassura. Faenza... 1919. Un vol. de (IV) et 521 pages.

Les communications étaient récemment encore si difficiles entre Faenza et la Belgique, que je désespérais d'entrer en possession des Œuvres de Torricelli. Je dois les plus vifs remerciements à Monseigneur Ogno Serra, Auditeur de la Nonciature Apostolique à Bruxelles, dont l'aimable intervention auprès des autorités italiennes est parvenue à aplanir toutes les difficultés du transport.

compose en réalité de quatre volumes à peu près de la même épaisseur, mais qui sont numérotés respectivement : volume I, 1e partie ; volume I, 2e partie ; volume II et volume III. Cette singularité s'explique. Les deux derniers volumes signés par M. Vassura, ont été imprimés les premiers. Mais l'éditeur a mal calculé le nombre de pages que rempliraient les documents réservés au volume I. Il a fallu par suite scinder ce volume pour ne pas lui donner des dimensions exagérées.

M. Vassura ayant dû se retirer après la publication des deux derniers volumes, le soin de faire paraître le premier a été confié à M. Loria. « Terrible honneur », dit-il dans l'Introduction [1]. Félicitons-nous qu'il l'ait accepté. Son travail l'emporte sur celui de son collègue.

Cette réflexion un peu maussade fait prévoir qu'il n'est guère possible de louer sans réserves la nouvelle édition. Mais, n'exagérons pas. Telles qu'on nous les donne, les *Œuvres de Torricelli* seront utiles, très utiles même. Aucun de nos grands dépôts publics ne peut hésiter à en faire l'acquisition. Ils sont tous plus pauvres les uns que les autres en éditions anciennes du grand Italien. C'est le moment de combler cette lacune. En outre, la nouvelle édition contient de multiples documents très intéressants, édités pour la première fois. Mais, je le répète, faite un peu vite, elle n'a pas le fini des éditions modèles des *Œuvres* de Fermat, de Descartes, de Huygens et de Galilée. N'incriminons pas trop les éditeurs. Il y avait voilà bientôt trois siècles, que Torricelli mourant avait prié les héritiers de ses papiers, Cavalieri, Serenai, Viviani, de publier ses œuvres complètes. La bonne volonté ne leur manqua pas, mais toutes leurs tentatives restèrent infructueuses. Plus tard elles furent reprises par d'autres, sans plus de succès. M. Vassura a craint de courir à un échec nouveau. Il a pensé qu'ici, comme souvent, le mieux était l'ennemi du bien, et que pour atteindre le but il fallait se presser. Nous lui en donnons acte. Quant à M. Loria, il a travaillé pendant les angoisses de la guerre. Excellente excuse, s'il en fut, pour se faire pardonner ! Belges, ce n'est pas nous qui lui reprocherons beaucoup quelques défaillances, notamment dans la correction des épreuves !

[1] Vol. I, 1e part., p. XXXI.



Parcourons sommairement les Tables de Matières des divers volumes.

La première partie du volume I débute par une Introduction de M. Loria qui a été tirée à part, et dont j'ai entretenu la Section au mois d'avril de l'année dernière. Puis, vient la réédition de la partie des *Opera Geometrica* de Florence 1644 consacrée aux mathématiques pures. Ce sont les traités : *De Sphaera et Solidis sphaeralibus Libri duo. De dimensione parabolae*, avec son appendice et son scolie relatifs à la cycloïde, plus un appendice nouveau. *De solido hyperbolico acuto. De dimensione cochleae.* Suit une série d'opuscules édités en entier pour la première fois : *De tactionibus,* collection de jolis problèmes relatifs au contact des circonférences données dans des conditions très variées de position et de rayon. *De proportionibus Liber,* essai d'explication et de simplification du 5e livre des *Eléments* d'Euclide ; intéressant surtout par le grand nom de Torricelli qui l'écrivit. Cet essai prouve, une fois de plus, combien, au XVIIe siècle, ce 5e livre d'Euclide paraissait obscur aux savants même les plus illustres. C'est de nos jours seulement que, grâce surtout aux travaux de Zeuthen, il est devenu clair pour tout le monde. *De planis varia. De solidis varia. De circulo et adscriptis. De comparatione perimetrorum cylindri, coni ac sphaerae. De aequalitate perimetrorum cylindri, coni ac sphaerae varia.* Ce dernier traité est composé de divers fragments réunis et mis en ordre par Viviani en vue de l'édition des *Œuvres complètes* de Torricelli qu'il projetait.

Contenu de la 2e partie du volume I. *Campo di Tartufi.* Torricelli s'excuse d'employer cette expression baroque. Il eût été plus simple de dire *Miscellanea. Contro gl'infiniti.* Courte note de deux pages relative à un emploi incorrect de la méthode des indivisibles. Dans un autre traité, Torricelli s'étend longuement sur les paradoxes auxquels conduit l'emploi abusif de cette méthode. M. Loria le donne plus loin sous le titre de *De indivisibilium doctrina perperam usurpata* [1]. *Sugli isoperimetri. De*

[1] Je n'ai pu étudier cette partie des *œuvres de Torricelli* comme je l'eusse voulu. La première édition des *Indivisibles* de Cavalieri et les *Centrobaryca* de Guldin dont je me servais habituellement et qui m'eussent été indispensables ont péri dans l'incendie de la Bibliothèque de l'Université de Louvain. Je n'ai pas jusqu'ici trouvé d'exemplaire de ces ouvrages dans d'autres dépôts belges.

*centro gravitatis sectoris circuli more veterum. De centro gravitatis sectoris circuli per geometriam indivisibilium.* Dans le premier de ces deux derniers traités, Torricelli recherche le centre de gravité du secteur circulaire à la manière de della Faille, par les méthodes d'Archimède ; dans le second, il se sert des indivisibles de Cavalieri. Ces traités ont été publiés une première fois à Florence, en 1898, par Caverni, dans sa *Storia del metodo sperimentale in Italia,* t. V, pp. 274-281 et 286-291. *De Maximis et Minimis.* On y trouve, notamment, la solution connue, due à Torricelli, d'un problème fameux de Fermat : « Trouver le point du plan d'un triangle, dont la somme des distances aux trois sommets soit minima ». *Nova per armillas stereometria.* Il s'agit du jaugeage de vases et de solides de formes diverses. Cet opuscule est le complément important d'un autre que nous avons rencontré ci-dessus : *De sphaera et solidis sphaeralibus. De centro gravitatis planorum ac solidorum. De infinitis hyperbolis. De infinitis parabolis.* Il y est question d'hyperboles et de paraboles d'un degré supérieur au second. *De cycloïde. De hemihyperbola logarithmica.* C'est le petit traité connu, publié en 1900, par M. Loria, dans le tome I de la 3e série de la BIBLIOTHECA MATHEMATICA (1). *De infinitis spiralibus. Sezioni coniche. De indivisibilium doctrina perperam usurpata.* Nous venons d'en parler il y a un instant. *Miscellanea.* Le volume se termine par la réédition d'une pièce de la plus haute importance, mais jusqu'ici extrêmement rare, pour ne pas dire à peu près introuvable. Sans être de la plume de Torricelli, elle le concerne directement. C'est la *Lettera a Filaleti di Timauro Antiate.* Timauro Antiate est le pseudonyme du célèbre humaniste Carlo Dati. Il intitule sa lettre : *Della vera istoria della cicloide e della famosissima esperienza dell'argento vivo.* Dati y défend la cause de Torricelli contre Roberval et Pascal. Son plaidoyer doit être lu avec attention par tous les historiens des mathématiques ; seul moyen pour eux de ne pas se laisser éblouir par le style prestigieux de l'auteur de l'*Histoire de la Roulette* et de *La Grande expérience de l'équilibre des liqueurs.* Placée en regard des écrits de Pascal, la lettre à

(1) Leipzig, Teubner, pp. 75-89.



Filaleti permet aux juges impartiaux de prononcer une sentence équitable dans la querelle de Torricelli avec les savants français.

Le volume II est consacré aux travaux de physique, de technique et de mécanique, ou plus généralement à tous les écrits de Torricelli étrangers à la Correspondance et aux mathématiques pures. Nous y rencontrons d'abord les *Leçons académiques*, au nombre de douze, qui parurent une première fois à Florence en 1715. M. Vassura nous en donne le texte, dit-il, d'après les autographes de Torricelli ; mais, il est d'une sobriété vraiment excessive relativement à ces autographes, leur état de conservation, les remaniements que leur ont peut-être fait subir les premiers éditeurs. Je n'ai pas l'édition de Florence sous la main et ne saurais dire par quoi l'édition actuelle en diffère. Vient après les *Leçons*, l'opuscule *De motu gravium naturaliter descendentium*, publié jadis par Torricelli lui-même dans ses *Opera Geometrica.* Suivent deux petits traités de mécanique jusqu'ici inédits : *De motu ac momentis varia. Soluzione di un problema intorno alle cose che stanno nell'umido.* Enfin, le volume se clôt par les études de Torricelli entreprises en vue d'améliorer la vallée de la Chiana, et par un court traité de perspective pratique.

Le volume III et dernier débute par une pièce intitulée : *Raconto d'alcuni problemi proposti e passati scambievolmente tra gli matematici di Francia, e il Torricelli nè i quattro anni prossimamente passati,* c'est-à-dire à partir de la seconde moitié de 1642 ; car le *Raconto* fut, on le sait, écrit dans la seconde moitié de 1646. Le reste du volume contient la *Correspondance.* C'est le plus intéressant, mais aussi, le plus défectueux des volumes de l'édition. Un certain nombre de lettres n'ont pas de date dans les manuscrits, et, à plusieurs reprises, M. Vassura leur en a attribuées qui sont visiblement erronées. Dans un long et excellent compte rendu, d'ailleurs très bienveillant, publié en octobre 1920 au BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1), M. de Waard a signalé, avec preuves à l'appui, quelques-unes de ces inexactitudes. M. Vassura les eût, semble-t-il, parfois évitées sans trop de peine, s'il s'était demandé pour chaque pièce, à quelle

(1) T. XLIV. Paris, Gauthier-Villars ; pp. 225-248.

lettre elle servait de réponse, et par quelle lettre le destinataire y répondait à son tour.

Autre négligence. Quand on possède l'autographe d'une lettre, il fait loi. Sauf les fautes de plume, on doit le publier tel quel. Il en va différemment quand on n'a que des copies, comme c'est le cas pour la plupart des lettres de la Correspondance de Torricelli. Tout d'abord, il peut arriver que la copie existe en plusieurs exemplaires. Il faut alors choisir le meilleur, ou parfois encore les corriger les uns par les autres. Pressé par le temps, il est arrivé à M. Vassura de s'arrêter au premier exemplaire venu. Pour juger des inconvénients qui en peuvent résulter, le lecteur n'a qu'à comparer le texte de la lettre écrite, de Florence, vers la fin de mars 1645, par Torricelli à Mersenne, tel que M. de Waard l'a publié en annexe de son compte rendu précité, avec le texte de la même lettre tel que M. Vassura nous le donne sous le N° 152 de la Correspondance (pp. 326-328).

Enfin, en constatant l'une ou l'autre distraction de l'éditeur, même en matière importante, on se demande malgré soi avec quelle fidélité la transcription des documents a été faite ? Voici en particulier une inadvertance plus forte que les autres. Déjà signalée par M. de Waard, elle est d'ailleurs aisée à découvrir. La dernière pièce du III<sup>e</sup> volume est la réédition d'une longue lettre de Roberval à Torricelli, reproduite d'après le texte imprimé dans les *Ouvrages de Mathématiques de M. de Roberval. A Amsterdam, Chez Pierre Mortier. M D CC XXX VI.* Or, dans l'édition de M. Vassura, — page 490, ligne 17 en remontant, — on rencontre le mot inintelligible « sufficuborum », dont le barbarisme aurait dû éveiller l'attention du correcteur des épreuves, et l'avertir qu'il y avait là une faute. En consultant l'édition d'Amsterdam, on s'aperçoit que le copiste, tournant deux feuillets à la fois, a oublié de transcrire les pages 370 et 371 ! Il faut lire : « suffi*cere* » — puis tout le texte des deux pages omises, importantes d'ailleurs pour l'histoire de la cycloïde, — puis, enfin, « *cubo*cuborum » (1).

(1) Pour être exact j'observerai que M. Vassura dit que son texte est reproduit d'après l'édition de La Haye, 1731. Elle présente évidemment la même particularité que celle d'Amsterdam dont je me sers.



Je m'arrête. Si j'ai cru ne pouvoir taire les critiques précédentes, je crains un peu maintenant qu'elles n'impressionnent trop défavorablement le lecteur. Nous avons eu de si parfaits modèles dans les Correspondances de Huygens, de Descartes, de Fermat, de Galilée ! Torricelli est un si beau nom, si sympathique ! Il est naturel d'éprouver quelque déception en constatant que sa Correspondance n'est pas publiée avec la même perfection, le même souci de l'exactitude, que celle de ses émules. Mais, la conclusion ne saurait être que M. Vassura a fait œuvre de peu d'utilité en nous la donnant, même telle qu'elle est. Il faut le répéter, malgré ses imperfections, ses lacunes, voire ses défauts, la Correspondance de Torricelli est très intéressante, très importante ; aucun historien des mathématiques ne peut la négliger.

Je n'ai guère fait jusqu'ici que la bibliographie de la nouvelle édition des *Œuvres de Torricelli ;* il resterait à dire un mot du fond lui-même de l'ouvrage. Et d'abord, j'en ai déjà fait l'observation dans ma communication du mois d'avril 1919, l'intérêt de la nouvelle publication est purement historique, mais à ce point de vue il est très grand. Pour en apprécier le détail, nous devons en avoir des analyses analogues à celles que Brassine a faites des *œuvres de Fermat* (1) ; Bopp, des livres de l'*Opus Austriacum* de Grégoire de Saint-Vincent consacrés aux coniques (2) ; — et s'il est permis de parler de soi — il faut attendre des résumés semblables à celui que moi-même, dans ces ANNALES, j'ai donné du traité *De Centro Gravitatis* de Jean Charles della Faille (3).

En l'absence de travaux de ce genre, contentons-nous de dire, après M. Loria, que les écrits de Torricelli peuvent se grouper sous trois chefs principaux : recherches relatives au baromètre et à la pesanteur de l'air ; recherches relatives au télescope, au microscope et au polissage des lentilles ; mémoires de mécanique et de

(1) *Précis des œuvres mathématiques de P. Fermat et de l'Arithmétique de Diophante.* Paris, Mallet-Bachelier, 1853. Extrait des MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE TOULOUSE.

(2) *Die Kegelschnitte des Gregorius a St. Vincentio.* Leipzig, Teubner, 1907. ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN, MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN, t. XX.

(3) T. XXXVIII, Louvain, 1913-1914 ; 2° partie, pp. 255-317.

mathématiques pures. Parmi ces derniers, M. Loria signale à l'attention ceux qui concernent la cycloïde. A mon sens, il faut plus particulièrement encore y noter une lettre du 27 février 1643 [1] à Michel Ange Ricci. Torricelli y donne à son ami, de la manière la plus lumineuse et la plus élégante, le moyen de mener une tangente à la cycloïde par la composition de deux mouvements ; en d'autres termes, par la méthode dite de Roberval. S'ils eussent connu cette lettre, la date qu'elle porte eût fourni un nouvel argument à Jacoli [2] et à Cantor [3], quand ils cherchèrent à démontrer que Torricelli avait de son côté imaginé cette méthode des tangentes indépendamment du savant français.

M. Lecat fait la communication suivante : *Sur les permanents d'éléments 1 et $x$.*

Si les éléments d'une matrice de classe $n$ et d'ordre $p$ ont pour valeurs 1 et $x$, ce qui est possible de

$$\sum_{i=0}^{p^n} \binom{p^n}{i} = 2^{p^n}$$

manières (en considérant comme distinctes toutes les positions

---

[1] On doit remarquer, cependant, que suivant notre manière de compter la lettre est du 27 février 1644 ; car elle est datée de Florence, où on se servait du style de l'Annonciation dans lequel l'année commence le 25 mars. L'argument conserve néanmoins toute sa valeur, car les *Cogitata physico-mathematica* de Mersenne, où la méthode des tangentes de Roberval fut publiée pour la première fois, ont à la suite du privilège l'achevé d'imprimer suivant : « Peracta est haec impressio, die 15 septembris 1644. »

M. de Waard a observé que dans le classement chronologique des lettres, M. Vassura a commis des erreurs, en ne tenant pas compte du style de l'Annonciation dans lequel plusieurs d'entre elles étaient datées. Les corrections à faire sont très importantes, mais trop longues pour être reproduites ici. Le lecteur en trouvera le détail dans le compte rendu du savant hollandais.

[2] *Evangelista Torricelli ed il metodo delle tangenti detto « Metodo del Roberval ».* BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, pubblicato da B. Boncompagni. T. VIII, Rome, 1875 ; pp. 265-304.

[3] VORLESUNGEN UEBER GESCHICHTE DER MATHEMATIK t. II, Leipzig, Teubner, 1900, pp. 880 sq.



absolues des $x$), les permanents, polynomes de degré inférieur à $p+1$, satisferont à ces deux conditions : *a)* la somme des coefficients est $(p!)^{n-1}$ ; *b)* la somme des produits des exposants des diverses puissances de $x$ par les coefficients correspondants égale X. $(p-1)!^{n-1}$, si X désigne le nombre des éléments $x$.

Le nombre N des polynomes qui satisfont à la première condition est facile à trouver. En effet, de ce que le nombre des arrangements avec répétition, de classe $k$, de somme $s$, des nombres 1, 2, ... est :

$$\Phi\,[k\,;\,s\,;\,1,\,2,\,\ldots] = \binom{s-1}{k-1},$$

on déduit aisément que

$$\Phi\,[k\,;\,s\,;\,0,\,1,\,2,\,\ldots] = \sum_{\gamma=1}^{k} \binom{k}{\gamma}\,\Phi\,(\gamma\,;\,s\,;\,1,\,2,\,\ldots),$$

ce qui donne

$$\text{(I)}\quad N = \Phi\,[p+1\,;\,(p!)^{n-1};\,0,1,2,\ldots] = \sum_{\gamma=1}^{p+1} \binom{p+1}{\gamma}\binom{p!^{n-1}-1}{\gamma-1}$$

La détermination du nombre des polynomes qui satisfont à la fois aux deux conditions revient à résoudre ce problème d'analyse combinatoire : *Trouver le nombre des arrangements avec répétition, de classe $k$, de somme $s$, des nombres 0, 1, 2, ..., la somme des produits d'un nombre par son rang dans l'arrangement devant être constant et valoir $S$.* Cette question n'a pas encore été résolue d'une manière générale.

Il est évident qu'en général le polynome représentant un permanent $(1, x)$ se déduit du polynome correspondant à la matrice $(x, 1)$ par simple renversement de l'ordre des coefficients.

Si $p = 2$, il devient très aisé de résoudre le problème. En effet, la seconde condition est alors identiquement satisfaite et les permanents, trinomes [1] à coefficients positifs, entiers ou nuls, et de somme $2^{n-1}$, sont, d'après la formule (I), en nombre [2] :

---

[1] Ce mot étant pris dans un sens large.

[2] Le nombre (II) peut s'obtenir directement avec grande facilité. Car si $d$