42, 1923

par rapport aux axes fixes, la vitesse du point H dans cette rotation est, en grandeur, direction et sens, l'accélération complémentaire j''.

Si donc, comme on le fait d'ordinaire, on représente ω par un vecteur porté sur l'axe instantané de rotation, on pourra écrire :

$$j'' = 2\,\omega . v . \sin(\omega, v).$$

Mais, dans le cas actuel des axes mobiles SXYz, la rotation ω se porte sur l'axe Oz, lequel est perpendiculaire au plan de l'orbite et c'est dans ce plan que se trouve la vitesse v. Par conséquent l'angle (ω, v) est droit et, par suite, $\sin(\omega, v) = 1$.

Donc on peut écrire :

$$(5) \qquad j'' = 2\omega v.$$

Comme $\omega = \frac{d\lambda}{dt}$, on a donc aussi :

$$(5^{bis}) \qquad j'' = 2\,v\,\frac{d\lambda}{dt}.$$

Si, dans la formule (4), on remplace j, j', j'' par les valeurs que nous venons de trouver, on a :

$$(6) \qquad J = \frac{f(M+m)}{r^2} + 2v\frac{d\lambda}{dt}.$$

Cette formule donne une première expression de l'accélération de la planète dans le cas du problème des deux corps, avec prise en considération du mouvement du périhélie de Mercure.

Donnons maintenant une autre forme à la relation (6) en y remplaçant v par sa valeur en fonction du rayon vecteur r et du demi grand axe a de l'orbite. On démontre que dans le cas d'une orbite planétaire elliptique, ce qui est le cas actuel, on a :

$$v = \sqrt{f(M+m)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}.$$

Par conséquent, au lieu de (6), on peut écrire :

$$(7) \qquad J = \frac{f(M+m)}{r^2} + 2\frac{d\lambda}{dt}\sqrt{f(M+m)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}.$$

On n'oubliera pas que l'accélération complémentaire est à la fois perpendiculaire à ω et à v. Étant perpendiculaire à ω, j'' est dans le plan de l'orbite et, étant perpendiculaire à v, j'' est dirigé suivant le rayon de courbure. C'est donc exceptionnellement (quand la planète est au périhélie ou à l'aphélie) que j'' passe par le centre du Soleil ; ce qui revient à dire que c'est exceptionnellement que J passe lui-même par ce centre.

Il n'en est pas moins vrai que le terme $2\omega v$ étant très petit par rapport au terme $\frac{f(M+m)}{r^2}$, la résultante J, dans le problème des deux corps, tout en ne passant pas rigoureusement par le centre du Soleil, s'en écarte fort peu.

Sur l'interprétation géométrique donnée par Pascal a l'espace a quatre dimensions, par H. Bosmans, S. J.

Sans être en soi de première importance, l'interprétation géométrique, que Pascal donne de l'espace à quatre dimensions, est curieuse, avant tout par l'ancienneté de sa date, ensuite parce qu'elle est correcte dans l'usage que l'auteur en fait, et qu'elle est simple.

Pour comprendre comment l'écrivain-géomètre arriva à la considération de cet espace, et pourquoi, d'autre part, ses idées ont été si peu remarquées, il ne sera pas hors de propos de rappeler l'une ou l'autre des circonstances dans lesquelles furent publiés les petits écrits où il est parlé de cet espace, je veux dire, la *Lettre de Dettonville à Carcavi* (1) et le *Traité des trilignes rectangles* (2).

Si on en excepte la correspondance échangée entre Pascal et Fermat sur le problème des partis, on ne lit plus guère les

(1) *Œuvres de Blaise Pascal publiées suivant l'ordre chronologique avec documents complémentaires, introductions et notes*, par Léon Brunschvicg, Pierre Boutroux et Félix Gazier, t. VIII, Paris, Hachette, 1914, pp. 334-384.
Cette édition fait partie de la Collection : « Les Grands Écrivains de la France ». Je la désignerai en abrégé par le mot *Pascal*.

(2) *Pascal*, t. IX, pp. 3-44.

ouvrages de mathématiques du philosophe de Port-Royal ; on ne lit même plus du tout les écrits où il emploie l'analyse infinitésimale ; j'entends précisément la *Lettre à Carcavi*, et les opuscules qui y sont annexés, publiés après la clôture du concours de la roulette.

Faut-il rappeler (1) que ce tournoi scientifique tapageur n'eut pas un instant pour but le progrès de la science. Pascal songeait à un grand écrit en faveur de la religion ; disons mieux, du jansénisme. Le duc de Roannes, son ami, lui persuada qu'il fallait préalablement se donner de l'autorité aux yeux des incrédules. Le hasard semblait en fournir l'occasion. Pendant les insomnies causées par une rage de dents, Pascal avait cherché à tromper la douleur en faisant des mathématiques et en résolvant quelques problèmes fort compliqués relatifs à la roulette. Que ne les proposait-il en défi à tous les savants de l'Europe, avec des prix pour qui les résoudrait le premier ? Si personne n'en venait à bout, comme c'était probable, il en publierait lui-même la solution, dont il aurait tout l'honneur.

La modestie n'était pas la vertu maîtresse de l'austère janséniste. Il accepta.

Mais à peine la pièce par laquelle il annonçait le concours eut-elle été lancée dans le public, que l'infatuation de l'auteur reçut une assez mortifiante leçon. Il y avait beau temps, en effet, que Roberval avait résolu plusieurs de ces questions que Pascal croyait si neuves, si difficiles. Le Professeur Royal de Mathématiques était lié d'amitié avec le janséniste, mais n'était pas d'humeur à laisser à autrui la gloire d'une découverte qui lui appartenait. Il avertit donc l'auteur du défi. Celui-ci n'eut jamais la bonne grâce de convenir ouvertement de sa méprise, mais il prit le parti équivoque de parler dès lors des questions mises au concours, comme si tout le monde avait dû savoir ou deviner que plus de la moitié d'entre elles étaient déjà

(1) Voir, par exemple, *Pascal*, dans l'Introduction à l'*Histoire de la Roulette*, par les éditeurs, t. VIII, pp. 181-194.

résolues par Roberval, et comprendre dès lors que les prix proposés concernaient exclusivement la solution des autres.

Ces restrictions mentales et l'intention manifeste d'apprécier les réponses des concurrents de manière à ne pas devoir décerner les prix firent une impression fâcheuse. Wallis, l'un des évincés, écrivait à Christiaen Huygens (1), que ces allures manquaient de franchise. Il y entrevoyait une manœuvre de Pascal et le soupçonnait de vouloir arracher leurs secrets aux concurrents naïfs, qui se laisseraient prendre à l'appât de prix. Peut-être, insinuait-il, était-ce chez Pascal un secret désir de les mettre à profit dans ses propres écrits.

Si je rappelle ces quelques faits, c'est pour dire que les prix n'ayant pas été décernés — Roberval et Fermat qui les eussent probablement remportés s'étaient abstenus — Pascal était engagé d'honneur à publier sa solution. Il s'exécuta sans tergiverser, mais avec la préoccupation constante de montrer qu'il faisait œuvre très difficile. Pour un maître de la plume comme lui, c'était chose aisée.

Il faut reconnaître qu'avec les moyens dont on disposait alors, peu de géomètres étaient de taille à aborder les problèmes proposés, mais Pascal en complique adroitement la solution, par le choix de la méthode et l'agencement du plan.

La méthode est géométrique et strictement synthétique. A lire Pascal, on croirait qu'il ignore l'algèbre. Pour lui, Viète, Albert Girard, Descartes semblent n'avoir pas existé.

Quant au plan, l'artifice est plus savant. Il consiste, tout en charmant le lecteur, à lui demander, en fait, un maximum d'attention. Pour cela, rien de mieux que de maintenir, pour ainsi dire, l'intelligence en suspens. Les problèmes sont au nombre de six. Sans en résoudre immédiatement un seul jusqu'au bout, Pascal commence par accumuler sans fin les théorèmes préparatoires et les lemmes, mais dans un enchaî-

(1) *Œuvres complètes de Christiaen Huygens, publiées par la Société Hollandaise des Sciences*, t. II. La Haye, Martinus Nijhoff, 1889 ; Lettre de John Wallis à Christiaen Huygens, Oxford, 22 décembre 1658 (1er janvier 1659, nouv. style), pp. 307-308.

nement parfait. Puis, ayant ainsi tenu longtemps le lecteur en haleine, il résout enfin les six problèmes en quelques pages.

Après coup, on reconnaît que les interminables préliminaires qui précèdent la solution ont été tous utilisés. Mais, comme l'attention eût été soulagée, en traitant séparément les questions d'aires, celles de volume et celles de leurs centres de gravité (1) !

C'est ce soulagement que Pascal ne voulait pas, et peut-être a-t-il outrepassé le but, car, ni Montucla (2), ni Cantor (3), ni Zeuthen (4), qui parlent tous avec éloges des écrits de Dettonville, ne paraissent néanmoins avoir eu la patience de les lire jusqu'au bout. Seul Maximilien Marie en donne une analyse assez développée (5). Elle intéresse en nous faisant connaître la méthode infinitésimale de Pascal. Celle-ci lui est assez personnelle, et diffère de la méthode italienne Cava-

(1) Avant d'arriver à la solution des problèmes, il faut préalablement lire et retenir :
1° La lettre de Dettonville à Carcavi ;
2° Le traité des trilignes rectangles ;
3° Le traité des sommes simples, triangulaires et pyramidales ;
4° Le traité des sinus du quart de cercle ;
5° Le traité des arcs de cercle ;
6° Le petit traité des solides circulaires ;
pour en arriver, enfin, 7° au traité général de la roulette.
Aucun des numéros 2-6 ne constitue un traité complet sur le sujet. Pascal n'y démontre que les propositions dont il se servira ultérieurement.

(2) *Histoire des Mathématiques...* Nouvelle édition, considérablement augmentée..., par J.-F. Montucla, de l'Institut national de France ; t. II. Paris, Henry Agasse, An VII, pp. 70-71.

(3) *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 2e édition, t. II. Leipzig, Teubner, 1900 ; pp. 907-910.

(4) *Notes sur l'Histoire des Mathématiques*, par H. G. Zeuthen. IV. *Sur les quadratures avant le calcul intégral et en particulier sur celles de Fermat.* BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES ET LETTRES DE DANEMARK, année 1895. Copenhague, Dreyer, 1895-1896 ; pp. 74-75.

(5) *Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques*, par Maximilien Marie ; t. IV. Paris, Gauthier-Villars, 1884 ; pp. 189-230.

lieri-Torricelli, de la méthode flamande Grégoire de Saint-Vincent-Tacquet, et de la méthode française de Fermat. Mais l'historien français ne nous semble pas l'exposer toujours avec toute l'exactitude désirable. Il fait tort à son compatriote, en la modernisant parfois à l'excès, et en donnant à son analyse un caractère déjà algébrique qu'elle n'a pas. La vraie originalité de Pascal est d'avoir su remplacer par la théorie des nombres figurés et par des artifices géométriques, souvent très ingénieux, les recherches que nous faisons aujourd'hui par l'algèbre littérale. Voilà ce que Marie oublie de mettre suffisamment en relief.

C'est l'un de ces artifices qui conduisit tout naturellement Pascal à s'occuper de l'espace à quatre dimensions.

Mais, ici, il faut éviter un malentendu. Plus d'un mathématicien avait, depuis longtemps, établi, par la méthode euclidienne, des formules algébriques d'un degré supérieur au troisième. Je rappellerai Cavalieri, par exemple, et le procédé tout géométrique par lequel il démontre, pour un exposant entier quelconque, la formule

$$\sum_0^a x^m \Delta x = \frac{a^{m+1}}{m+1}.$$

J'ai consacré, en 1922, une note sur ce sujet dans MATHESIS (1).

Ce qui mérite d'être remarqué, chez Pascal, c'est l'artifice conventionnel, mais géométrique, par lequel il représente les espaces de degrés supérieurs, ainsi que le langage dont il se sert quand il en parle.

Je relève dans la lettre de Dettonville et ses annexes trois passages relatifs à notre sujet. Mais avant de les transcrire, il faut rappeler quelques définitions.

Pascal nomme *triligne*, la figure formée par un angle droit AOB, dont les extrémités A et B des côtés de l'angle droit sont

(1) *Un chapitre de l'Œuvre de Cavalieri. Les propositions XVI-XXVII de l'« Exercitatio quarta ».* MATHESIS, t. XXXVI, Bruxelles, Stevens, 1922 ; pp. 365-373, 446-456.

reliées par un arc de courbe quelconque, circulaire, elliptique, parabolique ou autre, soumis à la condition unique de ne pouvoir être rencontré en plus d'un point par les perpendiculaires aux côtés de l'angle droit. Ces côtés peuvent d'ailleurs, d'après la nature du problème, être égaux ou inégaux entre eux.

Le côté AO se nomme la *Base* du triligne, et le côté BO son *axe*. Les perpendiculaires à AO sont les *Ordonnées à la base*, et les perpendiculaires à BO les *Ordonnées à l'axe*. Ces dernières sont nos abscisses ; les ordonnées à la base sont nos ordonnées actuelles.

Divisons l'axe en segments infinitésimaux égaux,

$$OC = CD = DE = EF \ldots$$

et menons les ordonnées à l'axe CG, DH, EI, FK...

Sur le triligne construisons un cylindre droit ; et par les ordonnées à l'axe que nous venons de tracer imaginons des plans perpendiculaires au plan du triligne.

Pascal fait plusieurs figures, mais je me servirai de la figure précédente dans les trois citations, sauf, bien entendu, à modifier convenablement les lettres du texte. Je moderniserai aussi l'orthographe [1].

« *Avertissement.* — Quand j'ai parlé de la somme des lignes AKB, GKB, HKB, IKB, KB, on n'a dû entendre autre chose sinon la somme des rectangles compris de chacune de ces lignes, et de chacune des petites parties égales BF, FE, etc., (c'est-à-dire, avec chacune des distances égales d'entre les plans voisins); et qu'ainsi cette multitude indéfinie de petits rectangles de même hauteur forment un plan. C'est ce que j'ai déjà assez dit dans les avertissements précédents.

» De même, quand j'ai parlé de la somme des espaces BAO, FKAO, EIAO, DHAO, CGAO, on a dû entendre que chacun de ces espaces fût multiplié par chacune de ces petites distances

(1) *Pascal*, t. VIII, pp. 357-358.

égales d'entre les plans voisins BF, FE, etc., et formassent ainsi une multitude indéfinie de petits solides prismatiques, tous de même hauteur, la somme desquels formera un solide, qui est celui que l'on considère, quand on a parlé de la somme de ces plans.

» On doit entendre la même chose par la somme des solides ; car il faut entendre de même qu'ils soient tous multipliés par ces mêmes portions égales, ou au moins (si l'on ne veut pas admettre une quatrième dimension) *qu'on prenne autant de lignes droites, qui soient entre elles en même raison que ces solides, lesquelles étant multipliées chacune par chacune de ces parties égales*, BF, FE, etc., *elles formeron un plan, qui servira de même à trouver la raison cherchée.* Ce qu'il ne sera plus nécessaire de redire. »

Pascal y revient cependant, bientôt après dans la même lettre et, comme on le verra, il dit beaucoup plus clairement que ci-dessus, que la notion de l'espace à quatre dimensions ne le blesse pas [1].

« Il faut remarquer que, comme la simple somme de ces lignes fait un plan, ainsi leur somme triangulaire fait un solide, qui est composé d'autant de plans qu'il y a de divisions dans l'axe ; lesquels plans sont formés chacun par les simples sommes particulières des ordonnées, dont la somme totale fait la somme triangulaire. Car, la somme triangulaire de ces ordonnées se prend ainsi : premièrement, en les prenant toutes ensemble AO, GC, HD, IE, KF, ce qui fait un plan égal au triligne ; ensuite en les prenant toutes excepté la première, c'est-à-dire, GC, HD, IE, KF, ce qui fait un autre plan égal au triligne BCG ; et ensuite IE, KF, ce qui fait un autre plan égal au triligne BIE, etc. De sorte qu'il y a autant de plans que de divisions, chacun desquels plans étant multiplié par les petites portions de l'axe, forme autant de petits solides prismatiques d'égale hauteur, tous lesquels ensemble font un solide, comme je l'ai dit d'ailleurs.

(1) *Pascal*, t. VIII, pp. 365-367.

» De la même sorte, la somme pyramidale des mêmes ordonnées fait un *plan-plan*, composé d'autant de solides qu'il y a de portions dans l'axe, lesquels solides sont formés chacun par les sommes triangulaires particulières, dont la somme totale fait la somme pyramidale. Car leur somme pyramidale se prend ainsi : premièrement, en prenant la somme triangulaire de toutes qui fait un solide, comme nous venons de dire ; et ensuite la somme triangulaire de toutes, excepté la première, qui fait un autre solide, etc. Et ainsi, autant qu'il y aura des divisions, il y aura aussi de solides, lesquels, étant multipliés chacun par une des petites divisions de l'axe, *formeront autant de petits plans-plans de même hauteur*, qui tous ensemble font le plan-plan dont il s'agit.

» *Et l'on ne doit pas être blessé par cette quatrième dimension*, puisque, comme je l'ai dit ailleurs [1], en prenant des plans au lieu de solides, ou même de simples droites, qui soient entre elles comme les sommes triangulaires particulières qui font toutes ensemble la somme pyramidale, la somme de ces droites fera un plan qui tiendra lieu de ce plan-plan. »

Citons enfin le troisième passage, qui appartient cette fois au *Traité des Trilignes rectangles*. Il est court, mais significatif [2].

« *Avertissement*. — On a été assez averti dans la lettre (il s'agit de la *Lettre de Dettonville à Carcavi* et plus particulièrement des deux passages ci-dessus), que *la quatrième dimension n'est point contre la pure géométrie*, puisqu'en substituant, tant aux CG carrés qu'aux rectangles CG en CO, des droites qui soient entre elles en même raison que ces carrés et ces rectangles, on démontrera la même chose par la même manière, sans aucun changement et sans quatrième dimension. »

(1) Dans le passage cité précédemment.

(2) *Pascal*, t. IX, p. 13. La proposition qui donne lieu à cet « *Avertissement* » est la suivante : La somme des solides compris de chaque ordonnée à la base et de sa distance de l'axe, est égale à la somme des solides comprise du carré de chaque ordonnée à l'axe et de sa distance à la base.

En représentant les ordonnées de l'axe par x, et les ordonnées à la base par y ; les coordonnées de A, par (a, o), celles de B, par (o, b); on pourrait exprimer en langage moderne ce théorème par

$$\sum_o^a xy^2\,\Delta x = \sum_o^b x^2 y\,\Delta y$$

et il doit être entendu des limites des deux membres.

D'après cela, il est manifeste qu'on peut résumer les idées de Pascal en ces deux propositions :

Parler de l'espace à quatre dimensions est un langage qui ne doit pas blesser les personnes intelligentes, puisqu'il ne s'agit en réalité que d'une multiplication. Nous dirions aujourd'hui en d'autres termes qu'il n'y a là qu'un langage conventionnel qui désigne une opération arithmétique parfaitement claire.

Pour suivre commodément un raisonnement géométrique dans cet espace, il faut l'abaisser d'un ou de deux degrés, en y substituant aux rapports de deux surfaces ou de deux volumes celui de deux lignes. Dans l'usage qu'en fait Pascal pour établir certaines de ses formules, l'artifice réussit parfaitement.

Au surplus, il n'a pas prétendu donner une théorie générale de l'espace à quatre dimensions, mais uniquement justifier la légitimité des opérations qu'il y effectuait.

M. Lecat expose un travail *sur les sections d'un déterminant,* dont la Section décide l'insertion dans les ANNALES, seconde partie.

M. Neuberg adresse à la Section un mémoire *sur la généralisation de la théorie des foyers des coniques,* dont la Section décide l'impression dans la seconde partie des ANNALES.

Il en est de même de la seconde partie du Mémoire de M. le Comte de Sparre *sur les grandes trajectoires.*

La Section nomme commissaires MM. les abbés Goedseels et Noblesse pour l'examen d'un Mémoire de M. Hallez-Leroy *sur les fondements de l'Arithmétique.*

12, 1923

SUR UNE CONTRADICTION REPROCHÉE A LA THÉORIE DES « INDIVISIBLES » CHEZ CAVALIERI, par H. Bosmans, S. J.

A un moment donné, Cantor, étudiant Cavalieri, dans ses *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* [1], fait sienne une boutade lancée à la tête du Géomètre italien, par Maximilien Marie, au cours de son *Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques*. « L'analyse de ses ouvrages, dit Marie [2], montre, je pense, que Cavalieri mérite d'être connu ; mais, s'il l'est si peu, je crois pouvoir dire que c'est bien sa faute. Si on donnait des prix d'obscurité, il aurait dû, à mon avis, sans conteste emporter le premier. On ne peut absolument pas le lire, on en est constamment réduit à le deviner .»

C'est exact. Qu'il écrive en italien ou en latin, du moins quand il fait des mathématiques, la phrase du Milanais est embrouillée; pénible, parce qu'il ne trouve pas le mot naturel et propre ; trop souvent aussi elle est elliptique, là où elle devrait préciser le sens des opérations à effectuer. On sait que, dès son bas âge, Cavalieri fut torturé par la goutte, dont les accès ne lui laissaient presque aucun répit. Il s'en plaint constamment. Dans ses mains endolories, la plume le fait souffrir et ne suit pas la rapidité de la pensée. Mais, l'obscurité de Cavalieri a en outre une cause plus profonde. Il était de ces savants, dont Pascal dit [3], qu'ils ont « l'esprit de finesse », sans avoir « l'esprit de géométrie », ou, en d'autres termes, qu'ils ont l'intuition de la vérité, sans avoir au même degré la passion des démonstrations rigoureuses.

Cavalieri a écrit sur la géométrie infinitésimale deux grands ouvrages : La *Geometria Indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* [4], qui parut à Bologne, en 1635, et y eut une seconde édition posthume, en 1653 ; les *Exercitationes Geo-*

[1] 2e éd., t. II. Leipzig, Teubner, 1900 ; p. 833.

[2] T. IV. Paris, Gauthier-Villars, 1884 ; p. 90.

[3] *Les Grands Écrivains de la France. Œuvres de Blaise Pascal*, t. XII ; *Pensées*, par LÉON BRUNSCHVICG. Paris, Hachette, 1921 ; pp. 9-14.

[4] La première édition, *Typis Clementis Ferronii*, se trouvait, avant 1914, à la Bibliothèque de l'Université de Louvain. Je me sers de la 2e, *Ex Typographia de Duciis*, dont la Bibliothèque de l'Observatoire d'Uccle et celle de l'Université de Gand possèdent un exemplaire.

metricae sex [1] éditées, encore dans la même ville, en 1647, année de la mort de l'auteur. Ni dans l'un, ni dans l'autre de ces ouvrages, Cavalieri ne définit les *indivisibles*. Quand il s'en sert comme moyen de recherche, il les suppose sans épaisseur ; mais, quand il réfute les objections qu'on soulève contre sa méthode, souvent il leur en attribue une, ce qui parut à la plupart de ses contemporains parfaitement contradictoire. Les deux concepts, à première vue, ne semblent, en effet, conciliables, qu'en donnant aux indivisibles sans épaisseur un sens conventionnel. Mais, lequel ? Cavalieri n'est pas clair, et nous y reviendrons, car c'est l'objet de cette note.

Écoutons d'abord l'idée déjà correcte que se faisaient des « indivisibles » quelques géomètres de l'époque. Pascal, par exemple, voit très bien que la méthode des indivisibles peut se ramener à la méthode d'exhaustion d'Archimède. Voici comment il en parle dans la célèbre lettre de Dettonville à Carcavy [2]. Il s'agit, dans son explication, d'un demi-cercle partagé en trapèzes curvilignes infinitésimaux de même hauteur.

« Tout ce qui est démontré par la véritable règle des indivisibles, dit-il, se démontrera aussi à la rigueur et à la manière des anciens ; et... l'une de ces méthodes ne diffère de l'autre qu'en la manière de parler ; ce qui ne peut blesser les personnes raisonnables, quand on les a une fois avertyes de ce qu'on entend par là... Je ne feray aucune difficulté d'user de cette expression : *la somme des ordonnées,* qui semble n'estre pas géométrique à ceux qui n'entendent pas la doctrine des indivisibles, et qui s'imaginent que c'est pécher contre la géométrie que d'exprimer un plan par un nombre indéfiny de lignes ; ce qui ne vient que de leur manque d'intelligence, puisqu'on n'entend autre chose par là, sinon la somme d'un nombre indéfiny de rectangles faits de chaque ordonnée avec chacune des petites portions égales du diamètre, dont la somme est certainement un plan, qui ne diffère

[1] *Typis Jacobi Montii.* (Univ. de Gand).

[2] Ed. citée, t. VIII. Paris, 1914 ; pp. 352-353. La lettre parut pour la première fois en 1658. Voir le fac-similé du titre de cette édition, même volume ; p. 326.

de l'espace du demy cercle, que d'une quantité moindre qu'aucune donnée. »

Quelques années avant Pascal, un géomètre trop ignoré, le Jésuite anversois, André Tacquet, s'était déjà exprimé avec la même précision. Dans la Proposition XI du Livre I de son traité *Des Anneaux et des Cylindres* (1), il formule un théorème, dont je modifie l'énoncé pour éviter une figure.

Étant donné : 1°) Un cylindre circulaire droit ; 2°) Une sphère décrite sur une des bases du cylindre comme plan diamétral, la base inférieure pour fixer les idées ; 3°) Un plan passant par le centre de cette base et coupant la surface du cylindre suivant une ellipse, dont le point le plus élevé au-dessus de la base est à une hauteur égale à la longueur de la circonférence de cette base. Démontrer, que le volume du segment, enlevé au bas du cylindre par le plan sécant, vaut le volume de la sphère (2).

Tacquet prouve d'abord géométriquement le théorème (proposition XI) ; puis il dit qu'il va le démontrer aussi par les indivisibles ; ce qu'il effectue en un tour de main et de deux manières (proposition XII). Voici la première :

Antérieurement, il avait établi, dans un lemme (proposition VII), que si on mène un plan perpendiculaire au diamètre d'intersection du plan sécant et du cercle de base, ce plan perpendiculaire coupe le segment du cylindre suivant un triangle, et la sphère suivant un cercle, dont les aires sont équivalentes. D'où il con-

---

(1) *Andreae Tacquet e Societate Iesu Cylindricorum et Annularium Libri IV*... Antverpiae, Apud Iacobum Meursium, MDLI ; pp. 17-24 (prop. 11, 12 et scolie) ; pp. 11 et 12 (prop. 7). (Univ. de Gand, Observ. d'Uccle). Cette première édition est rare. Il n'en est pas de même des deux suivantes :

Opera Mathematica R. P. Andreae Tacquet e Societate Iesu... Antverpiae, Apud Iacobum Meursium, MDCLXIX, t. III ; pp. 11-14 (prop. 11, 12 et scolie) ; p. 8 (prop. 7).

R. P. Andreae Tacquet Antverpiensis e Societate Jesu Matheseos Professoris Opera Mathematica... Antverpiae, Apud Henricum et Cornelium Verdussen, Anno M. DCC. VII ; pp. 483-485 (prop. 11, 12 et scolie) ; p. 481 (prop. 7).

(2) Proposition visiblement inspirée par le théorème XX de la 1e partie de la *Nova Stereometria Doliorum* de Kepler, qui parut à Linz. en 1615. Voir : *Joannis Kepler Astronomi opera omnia* edidit Dr Ch. Frisch, t. IV. Frankofurti A. M. et Erlangae. Heyder et Zimmer, 1863 ; pp. 584 et 585.

clut, d'après la méthode des indivisibles, que la somme des triangles vaut la somme des cercles, et que, par conséquent, le volume du segment de cylindre vaut celui de la sphère. Suit un scolie important que je traduis (1).

« Je ne crois pas, dit Tacquet, qu'on puisse admettre comme légitime et géométrique la méthode de démonstration par les indivisibles, ou par les *hétérogènes*, comme j'ai l'habitude de la nommer ; méthode que la *noble* Géométrie de Bonaventure Cavalieri a mise au jour. Elle passe des lignes aux surfaces, et des surfaces au corps, en concluant que les surfaces ont les rapports d'égalité et de proportionalité trouvés entre les lignes ; et étendant aux corps les rapports trouvés entre les surfaces. Ces raisonnements, à moins d'être ramenés aux *homogènes*, ne peuvent rien.

» Car, pour montrer la chose par un exemple, quel est celui qui se laissera convaincre par le raisonnement suivant : chaque triangle du segment de cylindre vaut un cercle de la sphère ; donc le segment vaut la sphère ?

» Cette conclusion ne s'en suit pas ; car, le segment de cylindre ne se compose pas de triangles, ni la sphère de cercles. Les Géomètres admettent, il est vrai, qu'une ligne peut s'engendrer par le mouvement d'un point, et une surface par celui d'une ligne. Mais, il est bien différent de dire qu'une quantité est produite par le mouvement d'un indivisible, et de dire qu'elle est un composé d'indivisibles. La première proposition est une vérité incontestable ; la seconde est si opposée à la Géométrie qu'elle doit la détruire ou être détruite par elle.

» Loin de moi, cependant, de vouloir refuser à une invention l'éloge qu'elle mérite. Je veux dire seulement, que les démonstrations par les hétérogènes ne forcent l'assentiment, que si on peut les ramener aux homogènes, ce qui est le cas le plus fréquent. Ainsi, dans l'exemple que je viens de donner, l'égalité du segment et de la sphère ne provient pas de ce que tous les triangles du segment sont égaux à tous les cercles de la sphère ; mais, elle s'en déduira si on les ramène aux homogènes comme suit :

---

(1) Tacquet raisonne sur une figure, dont l'omission entraîne dans la traduction plusieurs modifications.

» Puisque les triangles du segment sont égaux aux cercles de la sphère et sont menés à la même distance, on voit immédiatement que l'on peut inscrire des prismes dans le segment, des cylindres dans la sphère, qui ont la même hauteur et dont les bases sont équivalentes. De la constante équivalence des prismes et des cylindres, on déduit nécessairement l'équivalence du segment et de la sphère, comme nous l'avons fait dans la seconde démonstration » (c'est-à-dire, par la méthode des indivisibles, telle qu'il l'a employée dans la Proposition XII).

Tacquet continue :

« Mais, si on proposait un théorème qui ne pourrait se démontrer que par les indivisibles, on devrait douter de sa vérité jusqu'à ce qu'il apparaisse qu'ils sont réductibles aux homogènes. Or, ceci n'est autre chose, que revenir à la méthode des anciens, en épuisant les quantités proposées, par l'inscription d'homogènes. »

Comment Pascal et Tacquet qui écrivent peu d'années après la mort de Cavalieri, y voient-ils déjà si clair, tandis que d'autres géomètres de leur temps, parmi les plus illustres, ont hésité ?

Je crois pouvoir en apporter deux raisons.

La première, c'est que Pascal connaît le traité *Des Cylindres et des Anneaux* de Tacquet, puisqu'il le cite dans la lettre de Dettonville à Carcavy (1). Quant à Tacquet, il est élève de Guillaume Boelmans, qui fut lui-même un des bons disciples de Grégoire de Saint-Vincent. Or, parallèlement à Cavalieri, et bien avant d'avoir publié son *Problema Austriacum* (2), Grégoire employait les méthodes infinitésimales d'une manière claire et rigoureuse. Tacquet, formé à cette école, put sans trop de peine démêler le fouillis de Cavalieri.

Car voilà ma deuxième raison : l'obscurité légendaire de l'illustre italien. Aujourd'hui encore, il est malaisé de se rendre compte de la manière dont il entendait les indivisibles. Avait-il d'ailleurs sur eux une idée bien arrêtée ? Je l'ai dit ci-dessus, nulle part il ne les définit ; omission qui permet de croire qu'une définition l'eût embarrassé. Aussi, avant de répondre à la question,

(1) Éd. citée, t. VIII, p. 377.

(2) *Antverpiae. Apud Ioannen et Iacobum Meursios*, Anno MDCXLVII.

convient-il d'écouter au moins une de ses explications. Je la choisis parmi celles qui me paraissent les moins entortillées, et Cavalieri y revient à plusieurs reprises.

Elle se rencontre une première fois dans sa lettre à Torricelli, datée de Bologne, le 5 avril 1644 (1). Torricelli, par une lettre antérieure malheureusement perdue, lui avait communiqué quelques difficultés soulevées contre la méthode des indivisibles par un géomètre qui taisait son nom. Les deux amis l'appellent l'« Anonyme ».

D'après Cavalieri, il était aisé de répondre aux difficultés de cet « Anonyme ». Toutefois, en s'y essayant, il s'en était lui-même proposé d'autres, à son avis bien plus embarrassantes. En voici une. Pour éviter de nouveau l'emploi d'une figure, je la traduis en langage moderne.

Soit un triangle scalène ABC et une de ses hauteurs AD. Elle divise la base BC en deux segments inégaux BD, CD. Les deux triangles ADB, ADC sont entre eux comme leurs bases; donc, inégaux.

D'autre part, menons à l'intérieur du triangle donné une parallèle quelconque à la base BC, rencontrant AB en B', AC en C'; puis menons encore les parallèles B'E, C'F à AD, jusqu'à BC. Quelle que soit la position de B'C', on aura $B'E = C'F$. Donc, $\Sigma B'E = \Sigma C'F$. Or, si comme le veut la théorie des indivisibles, $\Sigma B'E = tr.\ ADB$, et $\Sigma C'F = tr.\ ADC$, on aura $tr.\ ADB = tr.\ ADC$, ce qui est absurde. Où cloche le raisonnement ? C'est ici que les explications de Cavalieri deviennent curieuses et fuyantes.

L'infinité des parallèles à AD, menées dans le triangle ADB, dit-il en résumé, n'est pas la même que celle des parallèles menées dans le triangle ADC. Dans le premier triangle, il y a autant de parallèles qu'il y a de points dans AB, tandis que dans le second il y en a autant que de points dans AC. En parlant ainsi, Cavalieri semble supposer que les deux droites ont deux nombres infinis de points proportionnels à leurs longueurs. Mais, il écrit presque toujours en logogriphes. Or, il ajoute à cette étrange

(1) *Opere di Evangelista Torricelli*, t. III, Faenza, G. Montanari, 1919 ; pp. 170-171.

conception, une comparaison qui lui donne, peut-être, un sens acceptable.

Quand on applique la méthode des indivisibles aux figures planes, dit-il, il faut supposer ces figures découpées dans une toile, dont les fils parallèles représentent les droites indivisibles. D'après cela, si AC est triple de AB, et si AB contient 100 points, par lesquels passent 100 fils — c'est toujours Cavalieri qui parle — AC contiendra 300 points, par lesquels passeront 300 fils.

Quelle signification géométrique doit-on attacher à cette comparaison ? Faut-il entendre qu'on doit diviser les deux surfaces en trapèzes infinitésimaux de même hauteur ?

Je crois qu'oui. Mais, on pourrait me répondre, avec une apparence de raison, que cela n'est pas, et que précisément dans cet exemple, Cavalieri suppose les droites indivisibles sans épaisseur. En 1647, en effet, il reprend le même exemple à la fin de son *Exercitatio tertia* (1). Ce troisième « Exercice » est écrit tout entier pour réfuter les attaques, dont la méthode des indivisibles avait été l'objet dans la *Centrobaryca* (2) de Guldin. Cavalieri suit son contradicteur pas à pas, et après avoir rencontré toutes les objections du jésuite, il termine par une remarque quelque peu dédaigneuse. Guldin, dit-il, comme jadis à l'« Anonyme », eût pu lui présenter des difficultés plus subtiles que celles qu'il a soulevées dans la *Centrobaryca,* et il en donne deux (3), dont la première est le paradoxe de l'aire des triangles, qui avait fait l'objet de sa lettre du 5 avril 1644 à Torricelli. Il y fait la même réponse et en guise d'éclaircissement y répète l'exemple des fils d'une toile; mais il renvoie, en outre, au n° 13 de l'*Exercitatio prima* (3). Or, là, l'explication est toute différente. Les points, les lignes et les surfaces y sont rigoureusement sans épaisseur. Mais, si dans le triangle ABC, la méthode des indivisibles ne donne pas le droit de conclure à l'égalité des côtés AB et

(1) *Exercitationes sex,* pp. 238-240

(2) C'est sous ce nom que Cavalieri cite l'ouvrage de Guldin, mais en voici le titre exact : *Pauli Guldini Sancto-Gallensis e Societate Iesu de Centro. Gravvitatis Trium Specierum Quantitatis continuae...* L'ouvrage est en quatre livres et quatre volumes, qui parurent à Vienne, de 1634 à 1641.

(3) *Exercitationes sex,* pp. 15-16.

AC, c'est que la *fluxion* du point B' le long de AB n'est pas la même que celle de C' le long de AC. Cavalieri introduit ici, dans la méthode infinitésimale, le mot de *fluxion* et la notion de mouvement ou de vitesse, qui devait être si féconde entre les mains de l'École de Newton.

En définitive, je crois pour ma part, qu'avec son grand « esprit de finesse », Cavalieri a vu qu'il y avait deux moyens *très différents* de rendre la méthode des indivisibles irréprochable; mais, dans son style embrouillé, il semble souvent les mêler, et bien des lecteurs ont pu croire qu'il tombait dans des contradictions manifestes. Il lui manquait, au surplus, je le répète, l'« esprit de géométrie » qui lui eût fait sentir le besoin de ramener, au moins une fois pour toutes, ses deux méthodes à un raisonnement par l'absurde rigoureux.

Peut-être eussé-je mieux fait de dire, qu'il lui manquait l'« esprit de patience ». Car, à la fin de l'*Exercitatio tertia*, après avoir affirmé que ceux qui y prendraient plaisir parviendraient à ramener ses démonstrations à la méthode d'Archimède. « Fais-en ce que tu veux ! dit-il au lecteur. Ces discussions et ces querelles sont affaire de philosophe et non de géomètre. Je suis presque toujours malade, et ne crois pas devoir perdre le temps inutilement ! » (1).

Quelques transformations géométriques, par M. J. Neuberg.

1. Soient $\lambda x + \mu y + \nu z = 0$, $\lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1 z = 0$ les équations de deux transversales Δ, Δ_1 du triangle de référence ABC. Nous supposons $\lambda\lambda_1 = \mu\mu_1 = \nu\nu_1$, le système de coordonnées ponctuelles x, y, z étant quelconque.

Si la droite Δ varie en enveloppant une courbe U, d'équation tangentielle $f(\lambda, \mu, \nu) = 0$, la droite Δ_1 enveloppe une courbe U_1, d'équation tangentielle $f\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\nu_1}\right) = 0$.

Connaissant le point de contact P de Δ avec U, on en peut déduire le point de contact P_1 de Δ_1 avec U_1. En effet, si f_1, f_2, f_3 désignent les dérivées partielles de $f(\lambda, \mu, \nu)$ par rapport à λ, μ, ν,

(1) *O. c.*, p. 241.