44, 1924

et

$$\sum_{\epsilon=1}^{2} \left| a^{(\epsilon)}_{\overset{\frown}{i},\overset{\smile}{j},\overset{\frown}{\kappa}} \right|_3 = \left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
a^{(1)}_{111} & a^{(1)}_{112} & a^{(1)}_{113} & a^{(2)}_{211} & a^{(2)}_{212} & a^{(2)}_{213} & 0 & 0 & 0 \\
a^{(1)}_{121} & a^{(1)}_{122} & a^{(1)}_{123} & a^{(2)}_{221} & a^{(2)}_{222} & a^{(2)}_{223} & 0 & 0 & 0 \\
a^{(1)}_{131} & a^{(1)}_{132} & a^{(1)}_{133} & a^{(2)}_{231} & a^{(2)}_{232} & a^{(2)}_{233} & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & a^{(1)}_{211} & a^{(1)}_{212} & a^{(1)}_{213} & a^{(2)}_{311} & a^{(2)}_{312} & a^{(2)}_{313} \\
0 & 0 & 0 & a^{(1)}_{221} & a^{(1)}_{222} & a^{(1)}_{223} & a^{(2)}_{321} & a^{(2)}_{322} & a^{(2)}_{323} \\
0 & 0 & 0 & a^{(1)}_{231} & a^{(1)}_{232} & a^{(1)}_{233} & a^{(2)}_{331} & a^{(2)}_{332} & a^{(2)}_{333} \\
\hline
a^{(2)}_{111} & a^{(2)}_{112} & a^{(2)}_{113} & 0 & 0 & 0 & a^{(1)}_{311} & a^{(1)}_{312} & a^{(1)}_{313} \\
a^{(2)}_{121} & a^{(2)}_{122} & a^{(2)}_{123} & 0 & 0 & 0 & a^{(1)}_{321} & a^{(1)}_{322} & a^{(1)}_{323} \\
a^{(2)}_{131} & a^{(2)}_{132} & a^{(2)}_{133} & 0 & 0 & 0 & a^{(1)}_{331} & a^{(1)}_{332} & a^{(1)}_{333}
\end{array}\right|,$$

on conclut que

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
a^{(1)}_{11} & a^{(1)}_{12} & a^{(1)}_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a^{(2)}_{21} & a^{(2)}_{22} & a^{(2)}_{23} & a^{(3)}_{21} & a^{(3)}_{22} & a^{(3)}_{23} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a^{(4)}_{31} & a^{(4)}_{32} & a^{(4)}_{33} & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{(4)}_{11} & a^{(4)}_{12} & a^{(1)}_{13} \\
0 & 0 & 0 & a^{(1)}_{21} & a^{(1)}_{22} & a^{(1)}_{23} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a^{(2)}_{31} & a^{(2)}_{32} & a^{(2)}_{33} & a^{(3)}_{31} & a^{(3)}_{32} & a^{(3)}_{33} \\
\hline
a^{(3)}_{11} & a^{(3)}_{12} & a^{(3)}_{13} & 0 & 0 & 0 & a^{(2)}_{11} & a^{(2)}_{12} & a^{(2)}_{13} \\
a^{(4)}_{21} & a^{(4)}_{22} & a^{(4)}_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{(1)}_{31} & a^{(1)}_{32} & a^{(1)}_{33}
\end{array}\right|,$$

la signature de ces deux déterminants de classe 4 étant celle des deux déterminants à 4 dimensions et d'ordre 2 considérés plus haut.

SUR LES THÈSES DE STATIQUE DE GRÉGOIRE DE SAINT-VINCENT

Note du R. P. H. BOSMANS, S. J.

La petite brochure objet de cette note est intitulée : *Theoremata Mathematica Scientiae Staticae. De Dvctv Pondervm Per Planitiem Rectè & obliquè Horizontem decussantem. Defendenda Ac Demonstranda In Collegio Societatis IesvLouanij A Gualtero Van Aelst Antverpiensi* [1] *Praeside R. P. Gregorio A S. Vincentio Math. Profess. eiusdem Societatis Religiosis. Die 29. Iulij ante Meridiem. Anno 1624.*

En colophon : *Lovanii. Typis Henrici Hastenii Anno 1624.* (Bibl. Royale de Belgique, Univ. de Gand). Petit in-4° oblong de 23 pages numérotées, plus vingt vignettes ; soit un total de 43 pages, le texte des thèses étant imprimé au verso du titre et des vignettes.

Quelques exemplaires ont au titre la variante : *Defendenda Ac Demonstranda A Ioanne Ciermans Dvcissilvio* [2] ... *Die 29. Iulij post Meridiem, Anno 1624.* (Collège Saint-Servais, à Liége).

Comme je l'écrivais il y a 13 ans, dans la notice de Grégoire de Saint-Vincent qui parut dans la BIOGRAPHIE NATIONALE [3], le

---

(1) Gauthier Van Aelst appartenait à une famille de négociants. Fils de Gauthier et de Catherine Bolen, il naquit à Anvers, le 27 février 1603, entra au noviciat de la Compagnie de Jésus à Malines, le 27 juillet 1619, et mourut à Bergues le 16 août 1638. Sa vie fut courte et a laissé peu de souvenir.

(2) Jean Ciermans naquit à Bois-le-Duc, le 7 avril 1602 et entra au noviciat de Malines le 6 novembre 1619. Après avoir enseigné les mathématiques à Louvain et à Anvers, il obtint l'autorisation de partir pour les missions de Chine ; mais il mourut en Portugal, en 1648 avant même d'avoir pu s'embarquer. Dans les controverses soulevées lors de l'introduction de la philosophie de Descartes en Belgique, Ciermans joua un rôle qui a été raconté par M. G. Monchamp (*Histoire du Cartésianisme en Belgique*, Bruxelles, Hayez, 1886. Aux endroits cités dans la Table des noms propres).

(3) Publiée par l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. T. XXI, Bruxelles, Hayez, 1911, col. 141-171.

Jésuite brugeois publia quatre ou cinq fois des programmes de solennités académiques du même genre, solennités qu'il présida. Mais seul le texte des thèses de mécanique défendues en 1624 nous est parvenu. Après avoir signalé, dans ma notice, l'existence de cette petite plaquette, je croyais qu'il n'y avait plus rien à en dire. Une circonstance fortuite m'y a fait revenir.

Le 29 juillet dernier, l'Association française pour l'Avancement des Sciences tenait à Liége son Congrès annuel. Plusieurs sujets d'histoire des mathématiques étaient inscrits à l'ordre du jour de la 1re section, entre autres le calcul infinitésimal au XVIIe siècle. On sait la grande place qu'y tient Grégoire. Or, il y avait jour pour jour trois cents ans que Van Aelst et Ciermans avaient défendu à Louvain les thèses de Statique du Jésuite brugeois. Il me parut intéressant de montrer aux membres de la section le programme de la séance conservé à la Bibliothèque du Collège Saint-Servais. La curiosité me poussa les jours suivants à le relire, ce qui me suggéra quelques réflexions qui m'avaient échappé autrefois.

Et tout d'abord, les *Theoremata* sont d'une lecture aujourd'hui assez désagréable. Grégoire cède au mauvais goût du temps. Le ton est emphatique, grandiloquent, mal approprié au sujet. Les figures géométriques se noient dans des vignettes gracieuses, je le veux bien, mais dont l'effet le plus clair est de détourner l'attention. Était-ce peut-être un moyen d'amuser et de distraire un auditoire que l'aridité de la discussion risquait d'ennuyer ?

Quoi qu'il en soit, disons à l'excuse de Grégoire que la phrase pompeuse et ronflante, les petits tableaux allégoriques qui encadrent les figures géométriques, fort à la mode alors, n'étaient pas près de disparaître. Quand, 17 ans plus tard, l'un des héros de la défense du 24 juillet 1624, Ciermans pour ne nommer que lui, devenu professeur au Collège des Jésuites de Louvain, présidera à son tour les thèses soutenues par Wolfgang Unversagt [1]

(1) *Annvs Positionvm Mathematicarvm Quas defendit ac demonstrauit Perill : Dom. D. Wolffgangvs Philippvs Iacobvs Vnverzagt Baro de Ebenfurt. Praeside R. P. Ioanne. Ciermans Societatis Iesv, Mat : Professore Louanii in Collegio Soctis Iesv. Anno M.DC.XLI.* (Bibl. Royale de Belgique). Un autre exemplaire de la Bibliothèque Royale est intitulé : *Disciplinae mathematicae traditae anno institutae Societatis Jesu saeculari a P. Joanne Ciermans Soc. Jesu Matheseos Professore.* Sans autre indication au titre, mais les deux exemplaires ont en colophon : *Lovanii. Apud Euerardum de Witte. M.DC.XL.* Le corps de l'ouvrage avec ce dernier titre donne le programme du cours professé par Ciermans ; mais les élèves qui défendaient en séance publique la doctrine du maître adaptaient au programme des titres et des dédicaces particuliers.

son élève, c'est en plein qu'il suivra les errements de son ancien maître.

Passons outre.

En 1631 Saint-Vincent eut le malheur de voir brûler la plupart de ses manuscrits lors du sac de Prague par les Suédois. Il s'en plaint amèrement dans la Préface de son *Problema Austriacum* [1]. La perte qu'il déplora le plus fut celle d'un grand traité de Statique, écrit dans le style d'Archimède et qui eût fait, dit-il, la matière d'un « juste volume ». Jamais il ne semble avoir eu le courage de le recommencer. Les manuscrits de la Bibliothèque Royale [2] ne nous en apprennent rien, et seule la petite brochure actuelle nous fournit quelques indications. Encore sont-elles assez imprécises, car les énoncés des thèses sont souvent peu clairs, et aucune démonstration qui permettrait d'en préciser le sens ne les accompagne.

Cependant, une chose qu'on ignorait saute immédiatement aux yeux. Saint-Vincent connaît la Statique de Stevin, et notamment la deuxième partie des *Beghinselen der Weeghconst* [3]. Albert Girard traduira un jour cette Statique et la nommera *L'Art pon-*

(1) *Problema Avstriacum Plvs Vltra Qvadratvra Circuli. Auctore P. Gregorio A. S^to Vincentio Soc : Iesu.* Antverpiae, Apvd Ioannem Et Iacobum Mevrsios. M.DC.XLVII.

(2) Ils y sont cotés *Ms.* 5770 à 5793 et y forment 17 gros volumes in-f° reliés.

(3) *De Beghinselen Der Weeghconst Beschreven Dver Simon Stevin van Brugghe.* Tot Leyden, Inde Druckerye van Christoffel Plantijn. Bij François van Raphetinghen. M.D.XCVI.

En même temps parurent : *De Weeghdaet* Beschreven etc. Tot Leyden, etc., comme ci-dessus ; et *De Beghinselen des Waterwichts* Beschreven etc., Tot Leyden, etc. comme ci-dessus.

Ces trois titres pourraient se traduire respectivement par Éléments de Statique ; Statique appliquée et Éléments d'Hydrostatique.

déraire (¹). Comme titre, il écrira en tête du chapitre auquel nous faisons allusion (²) :

« Jusques icy ont esté déclarées les proprietez des pesanteurs directes (c. à d. des forces agissant verticalement) ; suivent les proprietez et qualitez des obliques desquelles le fondement general est compris au theoreme suivant. »

Ce théorème, l'un des plus beaux de Stevin, est le onzième. Girard le traduit en ces termes (³) :

« Si un triangle a son plan perpendiculaire à l'horizon et sa base parallele à iceluy ; et sur un chacun des deux autres costez un poids spherique de pesanteur egale ; comme le costé dextre du triangle au senestre, ainsi la puissance du poids senestre à celle du poids dextre. »

La démonstration de Stevin est « infiniment originale », dit Duhem, quand il l'expose en langage moderne, dans ses *Origines de la Statique* (⁴), et il n'y a rien à ajouter au brillant commentaire dont notre regretté confrère l'accompagne. Je me contente d'y renvoyer le lecteur.

Mais à un point de vue différent de la mécanique, ce chapitre de Stevin mérite l'attention, surtout quand il s'agit de Grégoire. A deux reprises déjà, j'ai essayé de montrer, en effet, que les *Beghinselen der Weeghconst* et les *Beghinselen des Waterwichts* renferment les premiers progrès sérieux réalisés dans l'Analyse infinitésimale, après Archimède (⁵). L'ingénieur brugeois y transforme les méthodes indirectes par l'absurde dues au Syracusain, en méthode directe, parfaitement rigoureuse des limites.

(¹) Publié dans *Les Œuvres Mathématiques De Simon Stevin de Bruges*... Le tout reveu, corrigé et augmenté par Albert Girard Samielois, Mathématicien. A Leyde chez Bonaventure et Abraham Elsevier, Imprimeurs ordinaires de l'Université, Anno M.DC.XXXV, T. II, pp. 433-500.

(²) *O. c.* T. II, p. 448, col. 1.

(³) *O. c.* T. II, p. 448, col. 1.

(⁴) T. I, Paris, Hermann, 1905, p. 272. Voir aussi REV. DES QUEST. SCIENT., t. LVII, Louvain, 1905, pp. 132.

(⁵) *Sur quelques exemples de la théorie des limites chez Simon Stevin.* ANN. DE LA SOC. SCIENT. T. XXXVII, Louvain, 1912, 2ᵉ part., pp. 171-199.

L'analyse infinitésimale chez Simon Stevin, MATHESIS, t. XXXVII, Bruxelles, Stevens, 1923, pp. 12-18, 55-62 et 105-109.

L'idée de Stevin était féconde, car de là à une méthode correcte des indivisibles il n'y avait qu'un pas. Saint-Vincent le franchit. Mais, je viens de le dire, il connaissait la *Weeghconst* de Stevin, ce qui n'a pas été remarqué jusqu'ici.

Il est vrai qu'on eût pu le deviner. Stevin et Grégoire n'étaient-ils pas tous deux brugeois ? Si on n'y pensa pas, c'est que d'une part la *Statique* de Saint-Vincent était perdue, et que de l'autre la contribution de Stevin au progrès de l'Analyse infinitésimale n'avait jamais été remarquée. D'ailleurs, si cette idée s'était fait jour, elle n'eût été autrefois qu'une conjecture. Les *Theoremata mathematica Scientiae Staticae* prouvent péremptoirement aujourd'hui qu'il en fut bien ainsi.

En effet, pour démontrer le onzième théorème dont nous avons donné l'énoncé d'après Albert Girard, Stevin imagina une figure assez expressive pour qu'il l'adoptât ensuite comme armoiries, ou, si l'on préfère, comme marque de famille, avec en exergue la devise « Wonder enis gheen wonder », *La merveille n'est pas une merveille*. Cette marque se compose d'un triangle rectangle vertical s'appuyant sur son hypoténuse. Le triangle est entouré d'un collier de quatorze perles égales, deux d'entre elles reposent sur le plus petit côté de l'angle droit, quatre sur le plus grand, les huit autres pendent en liberté sous le triangle. Cette figure est reproduite par Duhem à l'endroit précité, où le lecteur pourrait la consulter.

Or, la même figure avec au-dessus le nom de Stevin et en dessous la traduction latine de sa devise, « mirum non est mirum », est aussi reproduite par Grégoire de Saint-Vincent dans la vignette du théorème VII. Preuve évidente qu'il connaissait la *Weeghconst*.

Et ce fait bien établi nous permet de marquer une étape importante dans la période de l'histoire du calcul infinitésimal, qui va d'Archimède à Leibniz.

Dans mon mémoire *Sur l'Œuvre mathématique de Blaise Pascal* (¹), j'ai tâché de préciser ce que Leibniz devait à ce dernier. Dans un autre travail, *La notion des « Indivisibles » chez Blaise Pascal* (²), j'ai indiqué le genre d'emprunts qu'en analyse

(¹) REV. DES QUEST. SCIENT., t. LXXXV, Louvain, 1924, pp. 130-161 et 434-451.

(²) ARCHIVIO DI STORIA DELLA SCIENZA, t. IV, Rome, 1924, pp. 369-379.

le Clermontois reconnaît avoir faits au Jésuite anversois André Tacquet.

Quant à Tacquet, il étudia à Louvain, sous Guillaume Beelmans, qui était lui-même l'un des élèves distingués de Grégoire de Saint-Vincent. Ni Tacquet, ni Beelmans ne créèrent de méthodes nouvelles. Ils s'assimilèrent parfaitement celles de leur maître et se contentèrent de les appliquer adroitement.

Il en va tout autrement de Grégoire. Encore une fois, on sait la grande place que son livre immortel *De ductu plani in planum* (1) tient dans le développement du Calcul infinitésimal. Aux yeux de Leibniz, ce livre élevait Saint-Vincent au niveau de Fermat et de Descartes. Mais les *Theoremata Mathematica Scientiae Staticae* prouvent qu'il y a cependant un intermédiaire entre les écrits d'Archimède et le chef-d'œuvre du Jésuite brugeois, c'est la *Weeghconst* de son compatriote Stevin. Le but de cette note était de le démontrer.

Pour éviter tout malentendu, peut-être importe-t-il, cependant, de rappeler en terminant, que bien plus qu'aux travaux purement géométriques de Pascal et de Saint-Vincent, Leibniz doit ses découvertes en Analyse infinitésimale à l'œuvre algébrique de Descartes et de Fermat.

SUR LA COURBURE DES LIGNES TRACÉES SUR UNE SURFACE

Note de M. F. SIMONART

1. Soient $$z = f(x, y)$$

l'équation d'une surface (S) rapportée à des axes rectangulaires OXYZ; $M(x, y, z)$ un point d'une courbe (M) tracée sur (S) ; α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente et R le rayon de courbure en M à (M) ; MN la normale à la surface, dirigée dans le sens où elle fait un angle aigu avec OZ ; enfin θ l'angle (R, MN). La courbure normale de la courbe est donnée par

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \tag{1}$$

(1) Il forma le livre VII du *Problema Austriacum*, pp. 703-864.

où p, q, r, s, t désignent les dérivées premières et secondes de z par rapport à x et y. Telle est la formule classique qui sert de point de départ à la théorie que nous avons en vue. On l'obtient ordinairement en utilisant, dans le calcul de cos θ, les formules de Serret-Frenet; on en déduit le théorème de Meusnier et l'équation d'Euler qui fait connaître la courbure des sections normales en M en fonction des courbures principales. Nous allons reprendre cette étude en la faisant dériver de la théorie du contact, ce qui lui donnera une allure plus géométrique et tout aussi naturelle que la précédente.

2. Au point M la section de la surface par le plan osculateur possède avec (M) un contact du second ordre et par suite la même courbure que (M). On est ramené à l'étude des sections planes.

Considérons alors la sphère (Σ) qui est tangente en M à la surface et qui possède en ce point avec (M) un contact du second ordre. Les sections planes dans (S) et dans (Σ) tangentes à (M) ont en M un contact du second ordre et par suite même courbure ; donc (Σ) est le lieu des cercles de courbure des sections planes dans (S) qui sont tangentes en M à la courbe (M). En particulier le centre C_n de (Σ) est le centre de courbure de la section normale, et si C est celui d'une section oblique on voit bien que C est la projection de C_n sur le plan de la section. C'est le théorème de Meusnier, et l'on a : $\frac{\cos\theta}{R} = \frac{1}{R_n}$, R_n désignant le rayon de (Σ). Le lieu de C est le cercle de Meusnier décrit sur R_n dans le plan normal à la courbe et toutes les droites polaires passent par C_n.

3. Plaçons l'origine en M et prenons la normale MN pour axe des Z, les axes MX et MY étant rectangulaires dans le plan tangent ; dès lors $p = q = 0$. Supposons que R_n soit dirigé suivant MN (autrement il faudrait changer le signe de R_n) ; la sphère a pour équation :

$$\Sigma x^2 - 2R_n z = 0.$$