Les articles destinés à *Mathesis* doivent être adressés *franco de port*, à M. J. NEUBERG, rue de Sclessin, 9, Liége, ou à M. AD. MINEUR, rue de la Victoire, 97, Bruxelles.

Ils doivent être écrits lisiblement et sur un seul côté de la feuille. Une même feuille doit contenir un seul article ou une seule question résolue, **précédée de l'énoncé de la question**. Les auteurs de notes *exigeant des figures* sont priés de *dessiner celles-ci, avec soin, dans le format du journal, sur des feuilles séparées*. Les auteurs de *Questions à résoudre* sont priés de donner, avec les énoncés, *un aperçu des solutions*.

La Rédaction ne renvoie pas les manuscrits non insérés.

Tout auteur d'un mémoire inséré à *Mathesis* a droit à un tirage à part gratuit de 25 exemplaires et, en prévenant à temps, il peut obtenir un plus grand nombre d'exemplaires, au prix coûtant.

Les ouvrages de mathématiques dont on enverra un ou deux exemplaires à M. AD. MINEUR, seront annoncés ou analysés dans le journal. Prière d'en indiquer le prix.

Mathesis paraît chaque mois, sauf en août et septembre, par livraisons de 32 pages qui peuvent être accompagnées de suppléments. Prix de l'abonnement annuel **(payable par anticipation par versement au compte-chèque n° 14423)** et pour la France et l'Étranger par un **mandat international** adressé aux imprimeurs-éditeurs :

Pour la Belgique . . . . . fr. **15** »
Pour la France et l'Etranger . . . . . » **20** »

On s'abonne à l'imprimerie STEVENS FRÈRES, rue des Fortifications, 9, Bruxelles.

Les réclamations, changements d'adresse, etc., doivent être adressés, NON aux rédacteurs, mais aux imprimeurs-éditeurs du journal.

Supplément à *Mathesis*
et Extrait de la *Revue des Questions scientifiques*, janvier et avril 1924.

SUR L'ŒUVRE MATHÉMATIQUE DE BLAISE PASCAL (*)

I

INTRODUCTION

Dans l'étude très développée sur Blaise Pascal, qui forme le troisième livre du *Port-Royal* de Sainte-Beuve, l'historien français propose ce sujet de recherches (1) :

« Il est une question que je poserai, dit-il, et sur laquelle j'aimerais à entendre un mathématicien homme de goût, un de ceux dont l'esprit, comme le dit Pascal, est *au-dessus de ces matières* : Quel est le caractère du génie mathématique de Pascal, si l'on compare ce génie à celui de Fermat, par exemple, ou de Leibnitz, ou de d'Alembert ? Quel rapport exact y a-t-il entre son talent mathématique et son talent littéraire ? Ainsi, m'assure-t-on, d'Alembert géomètre ne ressemble pas du tout à d'Alembert littérateur ; il a d'autres qualités (et de très hautes comme géomètre), mais il n'a pas les mêmes dans les deux cas. En est-il de même de Pascal ? ou bien ces deux génies en lui se tiennent-ils plus étroitement, comme on serait tenté de le soupçonner ; et le Pascal géomètre garde-t-il en quelque manière, du cachet de l'écrivain? De ce côté aussi, sans

(*) Communication présentée à la première Section de la *Société scientifique*, dans la séance tenue à Liége, le 25 octobre 1923.

(1) *Port-Royal*, par C.A. Sainte-Beuve, 4e éd., t. III; Paris, Hachette, 1878, p. 317.

parler de l'invention qui demeure son titre principal, est-ce une perfection de méthode et de forme, une façon de procéder ingénieuse et forte, la netteté suprême ? A-t-il de l'étendue ? En même temps qu'il approfondit et enserre toute une question, n'est-il pas enclin à la circonscrire, etc., etc. ? Heureux ceux qui lisent assez couramment les deux langues de Pascal, pour saisir à première vue ces rapports intimes qui dominent tout l'homme ! »

Seul, que je sache, un chapitre du *Blaise Pascal* de Joseph Bertrand, intitulé « Pascal géomètre et physicien » (1), répond en partie, mais en partie seulement, à la question de Sainte-Beuve. Ce chapitre est, en effet, écrit par un géomètrs éminent, qui fut aussi littérateur et homme de goût, en un mot, par l'« homme heureux » que souhaitait rencontrer l'auteur de *Port-Royal*. Cet « homme heureux » a de plue un mérite bien rare de nos jours. S'il admire Pascal, et même beaucoup, il ne se laisse cependant pas aveugler par l'éclat d'une idole. Bertrand sait reconnaître, chez Pascal, les lacunes du mathématicien. Usant d'une distinction célèbre, qui est de Pascal lui-même (2), le Secrétaire perpétuel de l'Institut de France reconnaît, au fond, que si, en mathématiques, Pascal eut à un haut degré l'*Esprit de Géométrie*, il n'eut pas toujours au même degré, quoi qu'on en ait dit, l'*Esprit de Finesse*.

Ce n'est pas un génie créateur ; mais il est clair, rigoureux, et surtout d'un talent merveilleux quand il met en pleine lumière certaines idées de ses devanciers passées inaperçues. En dehors du Calcul des probabilités, Pascal n'a presque rien inventé en mathématiques, se plaisait à dire notre regretté Secrétaire général, Paul Mansion, mais il a une plume si prestigieuse qu'il fait oublier tout ce que les autres ont écrit avant lui sur les sujets qu'il traite (3).

En l'adoucissant un peu, le jugement de Mansion finira par être celui de l'histoire. C'est déjà, à peu de chose près, celui de Bertrand ; malheureusement, le plan que l'auteur

(1) Paris, Calmann-Lévy, 1891, pp. 283-337.

(2) *Œuvres de Blaise Pascal*, par Léon Brunschvicg ; t. XII. Paris, Hachette, 1921, pp. 9-14. *Pensées*, n° 1.

(3) Les idées de Mansion relatives à Pascal ont été publiées dans un article posthume, intitulé *Pascal*, qui parut dans cette REVUE en avril 1920 ; t. LXXVII, pp. 333-350.

s'était imposé en écrivant son *Blaise Pascal* ne lui permit pas de traiter à fond le sujet. On pouvait espérer que le problème aurait été repris et résolu complètement en cette année jubilaire de 1923, où tant de travaux ont été dédiés à la gloire de Pascal, pour fêter le troisième centenaire de la naissance de l'illustre enfant de Clermont.

Il semble n'en avoir rien été.

Au lieu d'écrire un chapitre d'histoire, on s'est contenté de répéter la légende. On a même surenchéri. Or, rappelons en quels termes hyperboliques la légende s'écrivait déjà sous la plume de Chateaubriand (1) :

« Il y avait un homme qui, à douze ans, avec des *barres* et des *ronds* avait créé les mathématiques ; qui, à seize, avait fait le plus savant traité des coniques qu'on eût vu depuis l'antiquité ; qui, à dix-sept, réduisit en machines une science qui existe tout entière dans l'entendement; qui, à vingt-trois ans, démontra les phénomènes de la pesanteur de l'air et détruisit une des grandes erreurs de l'ancienne physique ; qui, à cet âge où les autres hommes commencent à peine de naître, ayant achevé de parcourir le cercle des sciences humaines, s'aperçut de leur néant et tourna ses pensées vers la religion ; qui, depuis ce moment jusqu'à sa mort, arrivée dans sa trente-neuvième année, toujours infirme et souffrant, fixa la langue que parlèrent Bossuet et Racine, donna le modèle de la plus parfaite plaisanterie comme du raisonnement le plus fort ; enfin, dans les courts intervalles de ses maux, résolut par abstraction un des plus hauts problèmes de géométrie, et jeta sur le papier des *Pensées* qui tiennent autant du dieu que de l'homme; cet effrayant génie se nommait *Blaise Pascal*. »

Que le lecteur se rassure : le génie géométrique de Pascal n'a rien d'effrayant. Loin d'avoir, même en mathématiques, parcouru le cercle des connaissances humaines, il ne sut pas entrevoir l'avenir réservé à l'Algèbre de Viète, de Fermat et de Descartes, qu'il eût pu et dû apprécier.

En disant cela, il ne faudrait pas, cependant, que le lecteur outre passât ma pensée. Je suis loin de vouloir dénigrer Pascal. Aussi déclarerai-je immédiatement et sans détour que je le tiens, non seulement pour un bon, mais pour un grand géomètre. Impossible pourtant d'apprécier son vrai

(1) *Génie du christianisme*, 3e part., liv. II, ch. VI. Dans une édition gr. in-8° sans date, de Paris, Garnier, que j'ai sous la main, p. 313.

mérite, à moins d'oublier les exagérations enthousiastes que des littérateurs étrangers à la matière ont écrites sur lui. Le mathématicien, qui, la plume à la main, lirait Pascal, dominé par cette idée préconçue, irait de déception en déception. Pour le connaître avec ses qualités, mais aussi ses défauts, il faut le placer dans le cadre de ses contemporains ; il faut comparer son œuvre à la leur ; rude et long travail, qui ne saurait faire l'objet d'un simple article de revue.

Mon but est plus modeste. S'il a été parlé à maintes reprises des écrits mathématiques de Pascal, dans les panégyriques du Maître qui viennent d'être publiés, les détails qu'on y a donnés ont rarement été empruntés aux sources. En réalité, les écrits mathématiques de Pascal sont peu connus. Les géomètres ne les lisent plus. Beaucoup d'entre eux seraient-ils capables de préciser en quoi ils consistent ? Me suis-je fait illusion en croyant que l'un ou l'autre des lecteurs de la REVUE serait curieux de le savoir ?

La tâche ne m'a pas été particulièrement difficile, car les vrais historiens des mathématiques, j'entends ceux qui font autorité — et en parlant ainsi, je vise notamment Michel Chasles (1) et Maurice Cantor (2) — les vrais historiens des mathématiques, dis-je, ont apprécié Pascal avec modération et équité. Je viens de les relire après avoir étudié le géomètre de Port-Royal dans ses propres ouvrages. On peut s'en rapporter aux jugements de Chasles et de Cantor, dans toutes leurs parties principales. Si je parais y ajouter quelque restriction, c'est qu'ici, comme souvent en histoire, la publication de documents inédits, l'apparition d'études nouvelles, obligent parfois à modifier dans les détails, des conclusions d'ailleurs solidement établies dans leur ensemble par les historiens antérieurs.

Cette réflexion me conduit naturellement à parler de la récente édition des *Œuvres de Blaise Pascal* (3), publiée en XIV forts volumes in-8°, dans la collection des « Grands

(1) *Aperçu historique sur l'Origine et le Développement des Méthodes en Géométrie* ; 3e éd. Paris, Gauthier-Villars, 1889. Voir la Table alphabétique des matières au mot : Pascal.

(2) *Vorlesungen ueber Geschichte der Mathematik*, t. II, Leipzig, Teubner, 1900. Voir la Table alphabétique au mot : Pascal.

(3) Paris, Hachette. Les volumes s'échelonnent de 1908 à 1921.

écrivains de la France », par MM. Léon Brunschvicg, Pierre Boutroux et Félix Gazier. Elle est faite « sur les manuscrits, les copies authentiques et les plus anciennes impressions, avec variantes, notes, notices, portraits, etc. » Je la citerai en abrégé par le mot *Pascal*.

En limitant strictement mon avis sur cette édition aux écrits mathématiques, et en évitant, faute de compétence, toute appréciation des autres, je dirai que les Introductions sont bien faites, objectives, documentées et impartiales. Il sera dorénavant difficile d'écrire sur l'œuvre mathématique de Pascal sans en tenir compte.

J'éprouve plus d'embarras pour porter un jugement sur le texte lui-même. Il est, il faut l'avouer, plus désagréable à lire que celui de l'édition Lahure-Hachette (1). Si j'allais jusqu'à dire qu'il lui est inférieur, les nouveaux éditeurs se récrieraient et me répliqueraient avec raison, qu'ils ont voulu faire œuvre d'érudits et d'archéologues, en reproduisant diplomatiquement les éditions originales qui sont très défectueuses. D'accord. Ce point de vue est défendable. Mais alors, dans un ouvrage où les notes de petit texte sont multipliées avec tant de profusion, pourquoi ne pas avoir signalé toutes les fautes de l'édition qu'on réimprime ?

Il y a plus. Si les premières éditions des traités de Pascal sont fort rares, la Bibliothèque Royale de Belgique possède néanmoins celle du *Triangle Arithmétique* (2). Ceci m'a permis de vérifier que les coquilles du nouveau texte ne sont pas toujours imputables à l'édition primitive. Il manque des *errata* complets, à la fin des volumes de M. Brunschvicg et de ses collaborateurs (3).

En vue de la clarté, je grouperai l'œuvre mathématique de Pascal sous trois chefs : travaux sur les coniques, travaux sur le triangle arithmétique et les écrits qui y sont annexés ;

(1) Cette édition eut, on le sait, de multiples tirages. J'ai sous la main celui de 1864.

(2) *Traité dv triangle arithmétiqve, avec qvelqves avtres petits traitez svr la mesme matière*. Par Monsievr Pascal. A Paris, Chez Gvillavme Desprez, ruë saint Iacqves, à saint Prosper. M.DC.LXV. in-4°.

(3) Celui qui est donné au tome XI, pour les quatorze volumes de l'édition, offre trop de lacunes, du moins pour les ouvrages de mathématiques, les seuls d'ailleurs que nous ayons vérifiés.

nais. On peut même dire que celui-ci vécut de sa seule réputation jusqu'au début du XIXe siècle. Poncelet (1) et Michel Chasles découvrirent alors quelques-uns de ces précieux placards, et ce dernier, notamment, en fit connaître le mérite, dans plusieurs des meilleures pages de son *Aperçu historique* (2).

Plus tard, Poudra se livra à de patientes recherches pour retrouver les écrits perdus de Desargues. Il en publia le résultat sous le titre d'*Œuvres de Desargues* (3). C'est seulement depuis cette édition que le grand géomètre est de nouveau vraiment connu. On sait notamment qu'il ne s'est pas toujours contenté de simples feuilles volantes et qu'il a publié des travaux d'une certaine étendue ; mais il n'est pas de mon sujet d'en donner le détail.

Desargues est dur à lire. D'abord, nous l'avons dit, ses écrits ne sont souvent que des ébauches. Ensuite et surtout, l'auteur a une terminologie à lui, si étrange, qu'elle le rend tout à fait inintelligible tant qu'on ne s'est pas assimilé son vocabulaire (4). Parmi ces mots nouveaux, un seul a pris rang dans la

zu Hannover herausgegeben von Georg Heinrich Perz. Il en forme alors la Dritte Folge. *Mathematik*. Erster Band.

Voici le passage auquel je fais allusion (p. 40) :

« Vidimus non ita dudum *Perspectivam* Heuretii, in qua perstringuntur rejiciunturque Dni. Des Argues Conica, *Leçons de Ténèbres* nuncupata ; quorum nonnisi 50 Exemplaria fuisse impressa dicuntur, adeo ut perdifficile sit, vel unum ex tam paucis procurare. Sentit Dn. Collins, siquidem mens et scopus Authoris probe attendatur, doctrinam illam applausum potius et augmentum mereri, quam vituperium. Consilium quippe ipsius fuisse, agere de Sectionibus Conicis, seu projectis e circulis minoribus in Sphaerae superficie sitis.»

(1) Voir : *Traité des propriétés projectives des figures*... par J. V. Poncelet, 2e édit. t. I, Paris, Gauthier-Villars, 1865, Introduction, pp. XXV-XXVI.

(2) Voir la table des noms propres au mot Desargues. Voir aussi : *Note sur les ouvrages de Desargues*, par M. Chasles, publiée dans le COMPTE RENDU HEBDOMADAIRE DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, t. XX, Paris, Bachelier, 1845 ; pp. 1550-1554.

(3) *Œuvres de Desargues* réunies et analysées par M. Poudra. Paris, Leiber, 1864. En deux volumes in-8.

(4) Poudra a donné le lexique des principaux termes employés par Desargues au t. I (pp. 99-102) des *Œuvres de Desargues*. En voici quelques exemples : Une droite se nomme un *tronc* ; les points pris sur cette droite, ses *nœuds* ; les droites qui rencontrent la première

Géométrie moderne, c'est celui d'*Involution*. Un autre est assez joli, et je le signale parce qu'il me sera nécessaire tantôt, c'est celui d'*Ordonnance* de droites, pour désigner plusieurs droites qui passent par le même point, ou sont parallèles entre elles. Il est bon de rappeler que Desargues, le premier, proposa de dire que les parallèles se rencontraient en un point à l'infini. Au lieu d'*Ordonnance*, nous disons aujourd'hui *Faisceau* de droites. Paul Tannery remarque (1), non sans à-propos, que le mot d'*Ordonnance* mériterait d'être repris, en lui donnant le sens précis qu'y attachait Desargues et en réservant au mot *Faisceau* un sens plus large, mais ce n'est pas le moment de discuter cette invitation.

De ce qui précède, il faut surtout retenir que Desargues était l'ami de Descartes et que le petit Blaise Pascal suivait avec assiduité les réunions de Mersenne. Plus d'un des causeurs de ce salon se figurait sans doute que leur conversation n'était pour le jeune homme qu'une source d'ennui, ou du moins un exercice de patience. Il n'avait, en effet, que seize ans ! L'avenir allait les détromper. Ils auraient pu, cependant, savoir qu'âgé de douze ans, cet enfant avait trouvé un Euclide dans la bibliothèque de son père, l'avait lu furtivement et, aidé de *barres* et de *ronds*, en avait déchiffré les 32 premières propositions. Sans aller plus loin ni ajouter foi à la légende qui veut qu'à douze ans il ait créé la géométrie, c'est déjà bien beau pour un enfant ! (2)

ou lui sont parallèles, ses *rameaux* ; un segment de droite, *brin de rameau*, l'origine du segment, sa *souche*, etc., etc. Cela ne manque pas d'élégance, quand on veut bien s'y habituer. Les trois coniques deviennent respectivement : un *défaillement* ou un *ovale* (une ellipse) ; une *égalation* (une parabole) ; un *outrepassement* ou un *excédent* (une hyperbole). Les noms des trois coniques sont la traduction des noms grecs que nous avons préféré conserver.

(1) *Œuvres de Descartes* publiées par Charles Adam et Paul Tannery, sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique, t. III. Paris, Cerf, 1898 ; p. 555. Dans un « éclaircissement » ajouté à une lettre de Descartes à Desargues, du 19 juin 1639.

C'est l'édition de Descartes que je citerai désormais, sans en donner le titre au long.

(2) Les historiens des mathématiques sérieux s'accordent pour reconnaître que c'est la seule interprétation raisonnable qui se puisse donner à la légende. MM. Léon Brunschvicg et Pierre Boutroux ont fait preuve d'esprit de critique et de bon sens en acceptant cette explication. *Pascal*, t. I, p. 55 ; en note.,

Cette fois une des feuilles volantes de Desargues fournit à Pascal l'occasion de répéter une petite merveille analogue. Il lit cette feuille, la comprend, voit les conséquences des propositions qu'elle renferme, et publie lui aussi sur une grande feuille volante les résultats de ses réflexions. C'est l'*Essay pour les coniques* (1). Une grande feuille volante imprimée d'un seul côté, voilà à proprement parler tout ce qui a été publié de Pascal sur les coniques jusqu'à la fin du XIXe siècle ! Combien nombreux sont ceux qui l'ignorent et croient à l'existence de quelque grand volume de Pascal sur ces courbes ! On conserve encore deux exemplaires de ce précieux placard, l'un à la Bibliothèque Nationale de Paris, l'autre à la Bibliothèque de Hanovre, parmi les papiers de Leibnitz (2).

Dès les premières lignes, Pascal découvre, sans le vouloir, la source où il a puisé : il définit comme Desargues une *Ordonnance* de droites. Le mot était trop personnel au Lyonnais pour qu'on pût s'y méprendre. Descartes, notamment, ne s'y trompa point. Le 1er avril 1640, il écrivait à Mersenne :

« J'ay receu... l'*Essay touchant les Coniques* du fils de M. Pascal, et avant que d'en avoir leu la moitié, j'ay jugé qu'il avoit appris de Monsieur des Argues, ce qui m'a esté confirmé incontinent après, par la confession qu'il en fait lui-même » (3).

Pascal n'avait aucune confession à faire, remarque à ce propos Joseph Bertrand (4) ; il rend loyalement justice à Desargues, c'est tout.

« Nous demontrerons aussi cette proprieté, dit en effet Pascal avant le 4e théorème, dont le premier inventeur est M. Desargues, Lyonnois, un des grands esprits de ce temps, & des plus versez aux Mathematiques, & entr'autres aux coniques, dont les escripts sur cette matière, quoy qu'en petit nombre, en ont donné un ample tesmoignage à ceux qui en auront voulu en recevoir l'intelligence ; & veux bien advoüer que je doibs le peu que j'ay trouvé sur cette matiere

(1) Reproduit avec une forte réduction, en fac-similé hors texte, par MM. Léon Brunschvicg et Pierre Boutroux. *Pascal*, t. I.

(2) Voir *Pascal*, t. I, p. 245.

(3) *Œuvres de Descartes*, t. III, p. 47.

(4) *Op. cit.*, p. 287.

à ses escripts, & que j'ay tasché d'imiter autant qu'il m'a été possible sa methode sur ce subjet » (1).

Desargues eut le bon goût de se montrer satisfait de cette déclaration de Pascal (2).

Le placard de son jeune ami se termine par cette phrase : « Nous avons plusieurs autres Problemes & Theoremes, et plusieurs consequences des precedens : mais la défiance que j'ay de mon peu d'experience et de capacité ne me permet pas d'en avancer davantage advant qu'il ait passé a l'examen des habiles gens qui voudront nous obliger d'en prendre la peine : après quoy, si l'on juge que la chose merite d'estre continuée, nous essayrons de la pousser jusques où Dieu nous donnera la force de la conduire » (3).

Tout cela est clair. Voilà l'histoire telle qu'elle ressort des documents. Elle suffit bien à la gloire de Pascal. Elle ne suffisait pas à la légende. Écoutons, par exemple, comment celle-ci s'exprime dans la Préface du *Traité de l'Equilibre des liqueurs*, ouvrage posthume de Pascal, édité par son beau-frère, Florin Périer (4).

« A l'âge de seize ans, il (Pascal) fit un Traité des Coniques qui passa, au jugement des plus habiles, pour un des plus grands efforts

(1) *Pascal*, t. I, pp. 257-258.

(2) Nous le savons par une parole de Desargues rapportée par son détracteur Curabelle, dans le but, qu'au surplus il n'atteignit pas, de nuire à l'auteur : A propos d'une proposition Desargues dit qu'il « remet d'en donner la clef, quand la démonstration de cette grande proposition nommée la *paschale* verra le jour. Et que le dit Paschal peut dire que les quatre premiers livres d'Apollonius sont ou bien un cas, ou bien une conséquence immédiate de cette grande proposition dont j'ai laissé la gloire à la liberté de l'auteur. » *Examen des Œuvres du Sr Desargues*, par T. Curabelle. A Paris. De l'imprimerie de M. et I. Henault, 1644, p. 71 (Univ. de Gand). L'édition originale est rarissime. Elle a été en partie reproduite dans l'édition des *Œuvres de Desargues*, par Poudra, t. II, pp. 383-388. Le passage cité s'y trouve, p. 387.

(3) *Pascal*, t. I, pp. 259-260.

(4) *Traitez de l'éqvilibre des liqvevrs et de la pesantevr de la masse de l'air. Contenant l'explication des causes de divers effets de la nature, qui n'avoient point esté bien connus jusques ici, et particulièrement de ceux que l'on avoit attribuez à l'horreur du Vuide.* Par Monsieur Pascal. A Paris, Chez Guillaume Desprez, ruë S. Iacques, à l'Image S. Prosper. MDCLXIII. Avec privilège du roy ; f° (aVII) r° et v° (Bibl. Roy. de Belgique). C'est l'édition princeps, reproduite dans *Pascal*, t. III.

d'esprit qu'on se puisse imaginer. Aussi Monsieur Descartes qui estoit en Hollande depuis longtemps, l'ayant leu, et ayant oüy dire qu'il avoit esté fait par un enfant âgé de seize ans, ayma mieux croire que Monsieur Pascal le père en estoit le véritable auteur, et qu'il vouloit se dépoüiller de la gloire qui luy appartenoit légitimement pour la faire passer à son fils, que de se persuader qu'un enfant de cet âge fut capable d'un ouvrage de cette force, faisant voir par cet éloignement qu'il témoigna de croire une chose qui estoit très véritable, qu'elle estoit en effet incroyable et prodigieuse. »

Depuis, on a encore enchéri et surenchéri. Le lecteur a pu voir, cependant, par les propres paroles de Descartes, combien l'impression que lui fit la lecture de l'*Essay* fut différente de ce que nous en dit Périer.

Les historiens des mathématiques ne s'y sont pas laissés égarer. Deux maîtres notamment, tous deux compatriotes et d'ailleurs chauds admirateurs de Pascal, ont pris à cœur de remettre les choses au point : Michel Chasles (1) et Paul Tannery (2). Je leur ai emprunté plusieurs des renseignements qui précèdent.

L'*Essay pour les coniques* se compose de trois définitions, trois lemmes, cinq théorèmes et trois figures ; le tout sans la moindre démonstration. Le premier lemme donne le fameux théorème de l'*Hexagramme Mystique*. C'est la plus originale des découvertes de Pascal en la géométrie pure ; il n'y a rien à retrancher des éloges qu'on en a faits.

Le théorème IV énonce d'une manière intelligible une proposition formulée obscurément (nous avons dit ci-dessus, pourquoi obscurément) par Desargues (3), et qui est relative à l'*Involution de six points* déterminés sur une conique et les

(1) *Aperçu historique*, p. 330. Chasles consacre à ce sujet la Note XIII, intitulée : *Sur les coniques de Pascal*.

(2) *Œuvres de Descartes*, t. III, pp. 53-56. Dans un « Éclaircissement » ajouté à la lettre de Descartes à Mersenne, du 1er avril 1640.

(3) Dans son *Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres d'un cône avec un plan*, par le sieur G. Desargues, Lionnois. Les exemplaires de l'édition originale sont tous perdus. Poudra a reproduit l'opuscule d'après une transcription qu'en avait faite La Hire. *Œuvres de Desargues*, t. I. ; pp. 103-230. Poudra y a ajouté une précieuse analyse, pp. 243-296. Les propositions sur le quadrilatère inscrit dans une conique coupé par une transversale se trouvent pp. 171-178.

côtés d'un quadrilatère inscrit, par une sécante qui les rencontre. Cette proposition est encore connue aujourd'hui sous le nom de théorème de Desargues.

L'*Essay* ne produisit nullement sur le public du temps l'impression d'être l'œuvre d'un génie « effrayant » comme le dit Chateaubriand. S'il ne provoqua même pas l'incrédulité de Descartes, comme le crut Périer, il fut loin, cependant, de passer pour un écrit banal, et il ne l'était pas. Les éloges affluèrent et le jeune Blaise se sentit très encouragé. Il se mit au travail et commença à rédiger son *Traité des coniques*, qu'il ne faut pas confondre avec l'*Essay* (1).

Malheureusement ce *Traité* est perdu, sans espoir d'être jamais retrouvé. Seul, Leibnitz nous a laissé quelques renseignements, d'ailleurs assez précis, sur son contenu. Rappelons par quelles circonstances le géomètre allemand connut l'ouvrage.

Le secrétaire de la Société Royale de Londres, Oldenburg, l'avait informé par lettre du 8 avril 1673 (2), datée de la capitale anglaise, que le libraire Guillaume Desprez, de Paris, affirmait l'existence du manuscrit du *Traité*. Oldenburg engageait donc Leibnitz à le rechercher.

Le renseignement méritait d'être pris au sérieux. Desprez était l'éditeur ordinaire des opuscules posthumes de Pascal. On lui devait le *Traité du triangle arithmétique* avec ses annexes, le *Traité de l'équilibre des liqueurs et de la pesanteur de la masse de l'air*, puis surtout la célèbre édition des *Pensées* (3) dite de Port-Royal.

Leibnitz se mit en campagne, d'abord sans grand succès,

(1) Cette confusion a, cependant, été souvent faite, par suite du peu d'attention que certains écrivains ont mis à les distinguer, quand ils en parlent.

(2) *Leibnizens mathematische Schriften*, vol. cité, p. 41.

(3) *Pensées de M. Pascal sur la religion et sur quelques autres sujets. Qui ont été trouvées après sa mort parmi ses papiers.* A Paris, chez Guillaume Desprez, ruë Saint Iacques, à Saint Prosper. MDC. LXX. Avec Privilège et Approbation. (Bibl. des Bollandistes). Pour des raisons connues, qu'il n'y a pas lieu de rappeler ici, la plupart des exemplaires de l'édition princeps ont au titre la mention fausse, mais intentionnelle, de « 2e édition » (Biblioth. Roy. de Belgique).

Nous avons donné, ci-dessus, le titre complet des deux autres ouvrages.

comme le témoigne sa correspondance avec Oldenburg au cours de l'année 1675 (1). Enfin, il eut la main heureuse et, grâce à Étienne Périer, il obtint la communication de tous les papiers relatifs aux coniques que Pascal avait laissés. Ceux-ci formaient moins un travail achevé que de simples brouillons et des notes détachées. Périer demanda à Leibnitz de les lire, de les classer et de lui donner son avis sur l'opportunité de leur publication. C'est ce qui ressort de la lettre du 30 août 1676, par laquelle Leibnitz annonce à Périer qu'il lui renvoie les manuscrits de son oncle. Il y ajoute l'analyse des pièces, et c'est ce qui donne à sa lettre une importance historique hors pair.

L'abbé Bossut en eut connaissance, et la publia pour la première fois en 1769, à la fin du cinquième et dernier volume de son édition des *Œuvres de Blaise Pascal* (2).

Cette pièce est avec l'*Essay* le seul document sur lequel se sont appuyés tous les panégyristes de Pascal. Elle est en français et parfaitement claire. Chercher à l'analyser, loin de l'abréger, serait s'exposer à la tentation de la commenter. Je crois plus agréable au lecteur de la lui donner telle quelle. Au surplus, pour porter en connaissance de cause un jugement sur les coniques de Pascal, il faut la connaître. La voici. Je la transcris sans l'interrompre, mais en renvoyant dans les notes du bas des pages, la traduction des passages latins et les réflexions que certaines expressions de Leibnitz suggèrent.

« MONSIEUR,

» Vous m'avez obligé sensiblement en me communiquant les manuscrits qui restent de feu M. Pascal, touchant les coniques. Car, outre les marques de votre bienveillance, que j'estime beaucoup, vous me donnez moyen de profiter, par la lecture des méditations d'un des meilleurs esprits du siècle ; je souhaiterois pourtant de les avoir pu lire avec un peu plus d'application ; mais, le grand nombre de distractions, qui ne me laisse pas disposer entièrement de mon temps, ne l'ont pas permis. Néantmoins, je crois les avoir lues assez pour pouvoir satisfaire à vostre demande, et pour vous dire que je les

(1) *Leib. math. Schrif.* Même vol.

(2) *Œuvres de Blaise Pascal* (sans le nom de l'abbé Bossut, au titre). La Haye, Detun, MDCCLXIX ; t. V, pp. 459-462.

Dans *Pascal*, t. II, pp. 220-124.

tiens assez entières et finies pour pouvoir paroître à la vue du public. Et, afin que vous puissiez juger si je parle avec fondement, je vous fais un récit des pièces dont elles sont composées, et de la manière que je crois qu'on les peut ranger.

» I. Il faut commencer par la pièce dont l'inscription est : *Generatio conisectionum, tangentium et secantium ; seu projectio peripheriae, tangentium et secantium circuli, in quibuscumque oculi, plani ac tabellae positionibus* (1). Car c'est le fondement de tout le reste. Les figures y sont insérées (2).

» II. Après avoir expliqué la génération des sections du cône, faite optiquement par la projection d'un cercle sur un plan qui coupe le cône des rayons, il explique les propriétez remarquables d'une certaine figure, composée de six lignes droites, qu'il appelle Hexagramme Mystique, et il fait voir, par le moyen des projections, que tout Hexagramme Mystique convient à une section conique, et que toute section conique donne un Hexagramme Mystique (3). J'ay mis au devant ces mots, *De hexagrammo mystico et conico.* Une partie de cette pièce se trouve répétée et insérée mot à mot dans une autre, sçavoir, les définitions (avec leurs corollaires), et les propositions (mais sans les démonstrations) qui se trouvent répétées dans le traité *De loco solido* (4), dont je parleray ci-dessous. Et je voy même que les figures du traité *De loco solido* suppléeront au défaut de quelques-unes qui manquent dans celuy-cy, *De hexagrammo.*

» L'usage de l'Hexagramme paroît dans les traitez suivants (5).

(1) « Génération des sections coniques, des tangentes et des sécantes ou projection de la périphérie, des tangentes et des sécantes du cercle, quelle que soit la position de l'œil, du plan (du cercle) et du tableau. » Il importe de remarquer que, d'après Leibnitz, Pascal prend pour point de départ, la projection de certaines figures dessinées sur le cercle.

(2) Ces figures étaient dessinées sur des feuilles séparées. C'est encore souvent le cas plus loin, et il est nécessaire de se le rappeler pour comprendre le sens précis de quelques-unes des remarques de Leibnitz.

(3) Les Nos I et II se comprennent aisément en admettant que Pascal a démontré directement son hexagramme sur le cercle par des moyens géométriques élémentaires, ce qui n'est pas difficile, et qu'il l'a étendu par projection centrale (optiquement) à toutes les coniques.

(4) Le lieu solide portait aussi le nom de lieu à quatre droites. En langage moderne, il peut se formuler comme suit : Lieu des points tels, qu'étant menées, de ce point, des droites formant avec les quatre côtés d'un quadrilatère des angles constants, les rectangles des droites menées aux côtés opposés soient entre eux dans un rapport constant.

(5) Il résulte clairement de cette phrase que c'est sur l'hexagramme mystique que Pascal établit la théorie des coniques. Comme Chasles le fera remarquer dans un passage que je citerai plus loin, chez Pascal l'hexagramme tenait lieu d'équation de la conique.

» Le IIIe traité doit estre, à mon avis, celuy qui porte cette inscription : *De quatuor tangentibus, et rectis puncta tactuum jungentibus unde rectarum harmonice sectarum et diametrorum proprietates oriuntur* (1). Car c'est là-dedans que l'usage de l'Hexagramme paroist, et que les propriétez des centres et des diamètres des sections coniques sont expliquées. Je croy qu'il n'y manque rien.

» Le IVe traité est : *De proportionibus segmentorum secantium et tangentium* (2). Car les propriétez fondamentales des sections coniques qui dépendent de la connoissance du centre et des diamètres étant expliquées dans le traité précédent, il falloit donner quelques belles propriétez universellement conçues, touchant les proportions des droites menées à la section conique ; et c'est de là que dépend tout ce qu'on peut dire des ordonnées (3). Les figures y sont aussi et je n'y voy rien qui manque. J'ay mis après ce traité une feuille qui porte pour titre ces mots : *De correspondentibus diametrorum* (4), dont la troisième page traite *de summa et differentia laterum seu de focis* (5).

» Le Ve traité est : *De tactionibus conicis*, c'est à dire (afin que le titre ne trompe pas), de punctis et rectis quas sectio conica attingit (6) ; mais je n'en trouve pas toutes les figures.

» Le VIe traité sera : *De loco solido* : j'y ay mis ce titre parce qu'il n'y en a point. C'est pour ce sujet que Messieurs Descartes et Fermat

(1) « Des quatre tangentes et des droites qui joignent leurs points de contact ; d'où dérivent les propriétés des droites divisées harmoniquement, et aux diamètres. »

(2) « Des proportions des segments (déterminés) sur les sécantes et les tangentes. »

(3) Leibnitz tenait, on le sait, copie de ses lettres. La copie de celle-ci est à la Bibliothèque de Hanovre. En marge, se trouve ici l'addition suivante :

« Je juge que ces cinq traitez contiennent entièrement les Éléments des Coniques, et qu'il n'y manque plus rien. C'est pourquoy on a mis au dos de la première partie ces mots : *Coniques.*

D'après la suite de ce passage, un peu longue pour être transcrite ici, au jugement de Leibnitz, Pascal aurait ajouté après coup le VIe traité aux Éléments. Voir *Pascal*, t. II, p. 222.

(4) « De correspondentibus diametrorum », littéralement : « de ce qui se correspond dans les diamètres ».

(5) « De la somme et de la différence des côtés, c'est-à-dire, des foyers. » Ce dernier mot fait deviner de quoi il est question sous ce titre assez vague.

(6) « Des contacts des coniques », c'est-à-dire, ajoute Leibnitz, « Des points et des droites que la section conique touche ».

ont travaillé, quand ils ont donné la composition du lieu solide, chacun à sa mode, Pappus (1) leur en ayant donné l'occasion. C'est là le fruit de la doctrine des sections coniques, car les lieux solides servent à la résolution des problèmes solides (2). Or je croy que Mons. Pascal a voulu donner ce traité à part ou le communiquer au moins à ses amis, parce qu'il y répète beaucoup de choses du deuxième traité, mot à mot et assez au long. Et c'est pourquoi il commence par cecy : *Definitiones excerptae ex conicis* (3) ; savoir du deuxième traité susdit, où il explique ce qu'il entend par ces mots, hexagrammum conicum mysticum, etc. On peut juger par là que le premier, le second, le troisième et peut-être le cinquième traité, doivent faire proprement les coniques ; et ce mot se trouve aussi au dos du premier traité. Les grandes figures illuminées (4) appartiennent à ce sixième traité.

» J'ai mis ensemble quelques fragments. Il y a un papier imprimé dont le titre est *Essay des Coniques* ; et comme il s'y trouve deux fois tout de même, j'espère que vous permettrez, Monsieur, que j'en retienne un. Il y a un fragment, *De restitutione coni* (5), sçavoir, les diamètres et paramètres étant donnés, retrouver les sections coniques. Ce discours paroît entier et a ses figures. Il y a un autre fragment où se trouvent ces mots au commencement, *Magnum problema* ; et je croy que c'est celui-ci qui y est compris ; Dato puncto in sublimi, et solido conico ex eo descripto, solidum ita secare, ut exhibeat sectionem conicam datae similem : mais cela n'est pas mis au net (6).

» Il y a quelques problèmes sur une autre feuille, qui sont cotés ; mais il en manque le premier ; on en tirera ce qu'on pourra en forme d'appendice ; mais le corps de l'ouvrage, composé des IV traités, est assez net et achevé.

» Je conclus que cet ouvrage est en état d'estre imprimé ; et il ne faut pas demander s'il le mérite ; je crois même qu'il est bon de ne pas tarder davantage, parce que je vois paroistre des traités qui ont quelque rapport à ce qui est dit dans celui-cy ; c'est pourquoi je

(1) Pappus nous a laissé l'énoncé du lieu solide dans ses *Collections mathématiques*, Liv. VII. Voir : *Pappi Alexandrini Collectiones quae supersunt* ex libris manuscriptis edidit.... Fridericus Hultsch ; t. II, Berlin, Wiedmann, 1877 ; pp. 676-679.

(2) Les problèmes solides étaient ceux qui ne pouvaient se résoudre par la règle et le compas, mais exigeaient l'emploi des sections coniques.

(3) « Définitions tirées des coniques ».

(4) « Illuminées », c'est-à-dire, dessinées en couleurs.

(5) Littéralement : « De la restitution du cône ».

(6) « Étant donné un point de l'espace et le solide conique décrit de ce point, couper ce solide de manière à obtenir une section conique semblable à une section conique donnée. »

crois qu'il est bon de le donner au plus tôt, avant qu'il perde la grâce de la nouveauté (1).

» J'en ay parlé plus amplement à Messieurs vos frères, dont je vous dois la connoissance, et que j'ai priés de me conserver l'honneur de votre bienveillance. J'avois espéré de vous revoir un jour icy ; mais je voy que vos affaires ne l'ont pas encore permis, et j'ay peu d'espérance de passer par Clermont. Je souhaiterois de vous pouvoir donner des marques plus convainquantes de l'estime que j'ay pour vous, et de la passion que j'ay pour tout ce qui regarde feu Mons. Pascal ; mais je vous supplie de vous contenter cependant de celles-cy. Je suis,

MONSIEUR,

» Vostre très humble et très obéissant serviteur.

» LEIBNITZ,
» A Paris, le 30 Août 1676. »

Malgré un avis si favorable, Étienne Périer ne fit pas imprimer le *Traité*. Celui-ci n'était qu'une ébauche. Le neveu craignit probablement qu'en le publiant il ne nuisît à la réputation de son oncle. Car nous sommes en 1676 ; Leibnitz ne s'occupait de mathématiques que depuis 1673, et ne jouissait pas alors de la grande autorité qu'il devait y acquérir un jour.

Un mot encore pour être complet.

J'ai dit ci-dessus qu'à proprement parler l'*Essay* était le seul écrit de Pascal sur les coniques qui ait été imprimé « jusqu'à la fin du XIXe siècle ». Voici ce qui m'a conduit à y ajouter cette date.

(1) Leibnitz fait notamment allusion au premier ouvrage de La Hire sur les sections coniques qui parut en 1673. Il est rare et je ne l'ai pas vu. En voici le titre : *Nouvelle méthode de Géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques qui ont pour base des cercles ou des paraboles, des ellipses ou des hyperboles*. Paris, 1673.

Plus tard, La Hire donna encore, sur les coniques, deux ouvrages dont la Bibliothèque Royale de Belgique possède des exemplaires :

Nouveaux Elémens des Sections Coniques, les Lieux Géométriques, la Construction ou Effection des Equations, par M. de La Hire, de l'Académie Royale des Sciences. A Paris, chez André Pralard... M.DC.LXXIX.

Sectiones Conicae in novem libros distributae... Authore Ph. De La Hire, regio matheseos Professore et Regiae Academiae socio. Parisiis, apud Stephanum Michalet... M.DC.LXXXV.

Gerhardt qui nous a donné tant d'opuscules inédits de Leibnitz, tant de parties de sa correspondance, a retrouvé dans les manuscrits de la Bibliothèque de Hanovre, les notes prises par Leibnitz au cours de sa lecture du *Traité* de Pascal.

Ce sont de simples extraits ayant plutôt le caractère d'aide-mémoire que celui de transcriptions proprement dites. Ces morceaux nous font connaître un peu quelques parties du *Traité*, mais ne nous donnent que des bribes du plus grand nombre. Gerhardt les a publiés en 1892, dans les SITZUNGSBERICHTE de l'Académie de Berlin (1), et MM. Brunschvicg et Boutroux les ont réédités dans les *Œuvres de Pascal* sous le titre de *Generatio conisectionum* (2). Cette « Génération des sections coniques » n'ajoute rien d'essentiel à ce que nous savions déjà par la lettre à Périer, et il nous faudrait entrer dans des explications, trop techniques pour prendre place ici, si nous la parcourions en détail.

Nous pouvons donc conclure ce chapitre.

Dans la théorie des coniques, Pascal se montra certainement très grand géomètre, mais c'est exagération pure de dire qu'il éclipsa tous les autres, notamment ses deux grands prédécesseurs Desargues et Apollonius. Les égala-t-il du moins ? Desargues me paraît avoir plus d'originalité, plus de coup d'œil, plus d'*Esprit de Finesse* ; Pascal plus de rigueur, plus de clarté, plus d'*Esprit de Géométrie*. Ni l'un ni l'autre ne peut commodément se comparer à Apollonius. Trop de siècles les séparent. Rien, d'ailleurs, n'égale la majesté, l'ampleur, l'impeccable logique avec laquelle se déroulent les sept livres des coniques du géomètre de Perge (3).

(1) A la suite d'un article intitulé : *Desargues und Pascal über die Kegelschnitte* von C. I. Gerhardt. SITZUNGSBERICHTE DER KOENIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN. Année 1892, t. I. Berlin, Georg Reimer, pp. 183-204.

(2) *Pascal*, t. II, pp. 234-243.

(3) Le lecteur de langue française peut pour la première fois s'en rendre aisément compte par l'excellente version que vient d'en publier M. Paul Ver Eecke, *Les Coniques d'Apollonius de Perge. Œuvres traduites pour la première fois du grec en français, avec une introduction et des notes*. Bruges, Desclée, De Brouwer, 1924. Ce volume d'une exécution magnifique est publié sous les auspices de la Fondation universitaire de Belgique. Il fait honneur aux presses des éditeurs.

Dans son *Aperçu historique*, Chasles a longuement expliqué le mérite propre des trois maîtres (1). Il a résumé plus tard ses profondes recherches dans une page du discours qu'il prononça en inaugurant son cours de géométrie supérieure. Il faut s'en tenir aux conclusions d'un érudit doublé d'un géomètre d'une pareille compétence, car elles découlent d'elles-mêmes de l'étude des sources. Écoutons-les (2).

« Les Anciens avaient considéré les sections coniques dans le cône, ou dans le *solide*, suivant leur expression ; c'est dire qu'ils avaient connu ces courbes en coupant par un plan un cône à base circulaire. Des propriétés du cercle qui forme cette base, ils avaient conclu à une propriété des sections coniques, savoir, que l'ordonnée est moyenne proportionnelle entre l'abscisse comptée à partir d'un sommet de la courbe et l'ordonnée d'une certaine droite fixe menée par l'autre sommet. De cette relation, peu différente de celle que nous appelons, en Géométrie analytique, l'*équation de la courbe*, ils déduisaient, par la seule force du raisonnement, les propriétés des sections coniques, sans se servir davantage du cône dans lequel ils avaient d'abord considéré ces courbes.

» Desargues, géomètre actif et pénétrant, qui cultivait toutes les parties des sciences et y apportait un esprit de généralisation rare, conçut l'idée d'appliquer aux coniques les propriétés mêmes du cercle qui servait de base au cône, et de simplifier par là la recherche et la démonstration de ces propriétés, souvent pénibles dans l'ouvrage d'Apollonius. Il reconnut aussi que, par ce moyen, les démonstrations relatives à l'une des trois courbes s'appliquent d'elles-mêmes aux deux autres, malgré leurs différences de figures ; idée profonde et heureuse, car les Anciens distinguaient essentiellement les trois courbes, et employaient des démonstrations différentes. Enfin, il découvrit, entre autres, une belle et féconde propriété de ces courbes, celle qu'il appela *Involution de six points*, proposition susceptible de prendre un grand développement dans certaines théories de la Géométrie moderne.

(1) Voir la Table des noms propres aux mots : Apollonius, Desargues et Pascal. C'est, je crois, le moment de rappeler en quel termes Joseph Bertrand apprécie l'*Aperçu* dans son éloge de Michel Chasles. Après avoir dit que la première édition de l'*Aperçu* parut dans les MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE DE BELGIQUE, Bertrand ajoute : « Le volume des mémoires de Bruxelles consacré tout entier au Mémoire de Chasles, restera la gloire de la Compagnie. C'est peut-être le plus consulté et le plus avidement recherché dans les collections académiques de tous les pays. » Joseph Bertrand, *Éloges académiques*, nouvelle série, Paris, Hachette, 1902, p. 47.

(2) *Traité de Géométrie supérieure*, par M. Chasles. Paris, Bachelier, 1852, pp. LXI-LXIII.

Le *Traité du Triangle Arithmétique* parut, en 1665, chez Guillaume Desprez, à Paris. En réalité, il date de 1654, et fut trouvé tout imprimé, à la mort de Pascal, parmi les papiers du défunt. Tel que les éditeurs le présentèrent au public, il convient d'y distinguer trois parties : le *Traité* proprement dit, ses *Usages*, les *Autres petits Traitez sur la mesme matière*, comme dit le titre. Mais, avant de les parcourir, résolvons d'abord un problème d'histoire, sinon très important, du moins assez curieux.

Au point de vue des dates, c'est tout à fait à tort que le triangle arithmétique porte, dans beaucoup de manuels français et belges, le nom de *Triangle de Pascal*. Cantor (1) a remarqué que dès 1544, Michel Stifel, dans son *Arithmetica integra* (2), applique le triangle arithmétique à la formation des coefficients du développement des puissances du binome. Le professeur d'Heidelberg nous apprend en outre qu'on rencontre le même usage du triangle chez Christophe Rudolff (3) et chez Tartaglia (4). MM. Léon Brunschvicg et Pierre Boutroux rappellent la rectification de Cantor dans leur Introduction au *Traité du triangle* (5) en y ajoutant

(1) *Vorlesungen ueber Geschichte der Mathematik*, 2e éd., t. II, Leipzig, Teubner, 1900, p. 434.

(2) *Arithmetica Integra Authore Michaele Stifelio. Cum Praefatione Philippi Melanchtonis.* Norimbergae apud Iohan. Petreium. Anno Christi M. D. XLIIII ; f° 44, v°.

(3) Cantor, *Vorlesungen*, t. II, p. 445. Je n'ai pas vu l'ouvrage de Rudolff, mais en voici le titre : *Die cosz Christorfs Rudolfs mit schoenen Exemplen der cosz durch Michael Stiffel, gebessert und sehr gemehrt*, 1571 (491 pp.). Le titre porte la date de 1571, mais on lit d'autre part en colophon : *Gedruckt zu Koeningsperg in Preussen, durch Alexandrum Behm von Luthomissel ; vollendet am dritten Tag des herbstmonats als man zalt nach der geburt Unsers Lieben Herren Jesu Christi* 1554. Terquem, auquel j'emprunte ces renseignements, observe que l'ouvrage n'a donc été publié que dix-sept ans après l'impression. Voir : *Christophe Rudolf* (par Terquem), BULLETIN DE BIBLIOGRAPHIE, D'HISTOIRE ET DE BIOGRAPHIE MATHÉMATIQUES, t. I, Paris, Mallet-Bachelier, 1855, p. 71, en annexe aux NOUVELLES ANNALES DE MATH., 1855.

(4) Cantor, *Vorlesungen*, t. II, p. 522. Le tableau y affecte une forme rectangulaire. Tartaglia lui donne, cependant, la forme triangulaire dans *La seconda parte del general trattato di numeri e misure di Nicolà Tartaglia*... In Venegia per Curtio Troiano dei Nauò. M. D. LVI, f° 69 v°.

(5) *Pascal*, t. III, pp. 438-440.

quelques précisions nouvelles. Mais il faut aller beaucoup plus loin que ne le font Cantor, Brunschvicg et Boutroux. A titre de simple renseignement curieux, car le fait n'influença en rien les mathématiques des Occidentaux, je dirai d'abord, que le triangle arithmétique semble avoir été en usage chez les Chinois dès une très haute antiquité. Dans le *Miroir précieux des quatre éléments*, publié par Tschu Schi-ki en 1303, il affecte la forme d'un triangle rectangle isocèle à hypoténuse horizontale, comme chez Tartaglia. Le géomètre chinois y donne les coefficients du développement du binôme jusqu'à la huitième puissance, et parle de l'emploi du triangle pour former ces coefficients, comme d'une méthode depuis longtemps en usage. J'emprunte ces détails à un article de Bienatzki qui parut, en 1856, dans le JOURNAL DE CRELLE (1). M. Heiberg a publié un exemple du Triangle arithmétique, dû probablement à un scoliaste byzantin du XIIIe siècle, et qu'on lit dans un manuscrit d'Euclide de cette époque, appartenant à la Bibliothèque Vaticane (2). D'autre part, M. Ugo Cassina, dans un article tout récent (3), donne le

(1) *Die Arithmetik der Chinesen.* JOURNAL FUER REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK HERAUSGEGEBEN VON A. L. CRELLE, t. V, Berlin, Georg Reimer, 1856, pp. 59-94. Le triangle s'y trouve reproduit, p. 87.

L'article de Bienatzki a été en partie traduit et en partie résumé dans les NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES (2e série, t. I, Paris, Mallet-Bachelier, 1862, pp. 35*-44* et t. II, 1863, pp. 529-540. Les renseignements relatifs au triangle de Tschu Schi-ki se trouvent à la page 538 de ce dernier volume. C'est à Bienatzki que Cantor a emprunté ce qu'il nous apprend du triangle arithmétique chez les Chinois dans ses *Vorlesungen ueber Geschichte der Mathematik* (3e édit. T. I, Leipzig, Teubner, 1907, p. 687).

J'ajouterai enfin, pour être complet, que ce que je viens de dire du triangle de Tschu Schi-ki a été plus récemment confirmé par l'historien japonais Yoshio Mikami, dans *The Development of Mathematics in China and Japan*, volume qui forme le t. XXX des ABHANDLUNGEN FUER GESCHICHTE DER MATHEMATIK MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN, BEGRUENDET VON MORITZ CANTOR (Leipzig, Teubner, 1913, p. 90).

(2) *Euclidis Opera omnia* ediderunt et latine interpretati sunt I. L. Heiberg et M. Menge, t. VIII. Leipzig, Teubner, 1916, p. 290.

Le Ms. est coté *Cod.* Vat. gr. 1038. Le triangle se trouve dans la marge inférieure du f° 129 v° (7).

(3) *Storia del Triangolo aritmetico.* IL BOLLETINO DI MATEMA-

fac-similé du Triangle tel qu'on le voit dans l'*Arithmétique des Marchands* de Pierre Apian, publiée à Ingolstadt, en 1527 (1). Moi-même, j'ai donné, en 1906, une note aux ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE (2), où je crois avoir montré, qu'à partir du milieu du XVIe siècle, le Triangle arithmétique devint bientôt d'un emploi courant. Dans nos Provinces on le rencontre, par exemple, chez Brasser (3), chez Adrien Romain (4), chez Nicolas Petri de Deventer, dont la *Practique om te leeren cijpheren* (5) fut pendant de longues années le

TICA, 2me sér., t. II. Florence, 1923. Sezione storico-bibliografica, pp. XXXIII-XXXIX.

(1) *Eyne Newe Und wolgegründe vnderweisung aller Kauffmans Rechnung in dreyen büchern,...* durch Petrum Apianu(m) von Leysznick...

En colophon : Gedrückt und volendt zu Ingolstadt durch Georgium Apianum von Leysznick im Jar nach der geburt Christi 1527, am 9 tag Augustt.

L'ouvrage n'existe pas, à ma connaissance, dans les bibliothèques belges.

(2) T. XXXI, 1e part., pp. 65-72. *Note historique sur le Triangle arithmétique dit de Pascal.*

(3) *Regula Cos of Algebra...* door J. B. Brasser,... t'Amsterdam, by Gerrit van Goedesbergh... Anno 1663, pp. 2 et 3. A cette date, Brasser ne connaissait certainement pas le triangle de Pascal, qui ne parut que deux ans plus tard. Je cite Brasser pour montrer que dans nos provinces, le triangle se rencontrait déjà même chez les auteurs de second ordre.

(4) *In Mahumedis Algebram* ; p. 68. L'ouvrage n'est pas daté, mais j'ai démontré qu'il est de 1598 ou 1599. Voir mon mémoire : *Le fragment du Commentaire d'Adrien Romain sur l'Algèbre de Mahummed ben Musa el-Chowareszmi.* ANN. DE LA SOC. SCIENT., t. XXX, 1906, 2me part., pp. 267-287. L'exemplaire de Louvain a été détruit. Il en existe heureusement un second à la Bibliothèque de la ville de Douai, coté *Réserve* C. 203. Je dois ce renseignement à une information toute récente de M. Wagon, président de la Société nationale d'Agriculture, des Sciences et des Arts du Département du Nord. Je l'en remercie vivement.

(5) *Practique om te leeren Rekenen, Cypheren ende Boeckhouwen...* Deur Nicolaum Petri Daventriensem. En colophon : Ghedruckt tot Amstelredam, by Cornelis Claesz... Anno 1583 ; f° 113 v°.

Même titre : Anno M. D. XCI. Puis en colophon : t'Amstelredam, by Barendt Adriaensz... A° M. D. XCI, f° 130 v°.

Même titre: t'Amsterdam, by Cornelis Claesz : Anno 1605, f° 130 v°.

Même titre : t'Amstelredam, Door Hendrick Laurentsz. Anno 1635, f° 135 v°.

Voir sur cet ouvrage mon mémoire : La « *Practique om te leeren*

livre de chevet de tous les savants des Pays-Bas pour l'étude de l'algèbre. En Angleterre, on trouve le triangle dans la *Clavis Mathematica* d'Oughtred (1), dont la première édition est de 1631. Je ne reviens pas sur Stifel, Rudolff et Tartaglia, mais, parmi les auteurs qui écrivirent en français, je citerai Stevin, dans les diverses éditions de son *Arithmétique* (2), Albert Girard, dans son *Invention nouvelle en l'Algèbre* (3) et Jacques Peletier du Mans dans son *Arithmétique* (4) qui ont tous le Triangle.

Cypheren » *de Nicolas Petri de Deventer*, publié en 1908 dans les ANN. DE LA SOC. SCIENT., t. XXXII, 2me part., pp. 272-301.

(1) *Arithmeticae in numeris et speciebus institutio : quae tum logisticae, tum analyticae, atque adeo totius mathematicae, quasi Clavis est...* Londini, Apud Thomam Harperum, M. DC. XXXI ; p. 26. Dans cette première édition, Oughtred n'a pas mis son nom au titre, mais il a signé la Dédicace. Pour plus de détails sur cet ouvrage remarquable, voir mon mémoire : *La première édition de la « Clavis Mathematica » d'Oughtred, son influence sur la « Géométrie » de Descartes*, publié, en 1911, dans les ANN. DE LA SOC. SCIENT., t. XXXV, 2e part., pp. 24-78.

Je ne connais pas là 2e édition, mais dans la *Guilielmi Ougtredi... Clavis Mathematica...* Editio tertia... Oxoniae... Lichfield... 1625, le Triangle se trouve p. 37. Les autres éditions sont postérieures à 1665.

(2) *L'Arithmétique de Simon Stevin de Bruges...* A Leyde, de l'Imprimerie de Christophle Plantin. M. D. LXXXV ; p. 106.

L'Arithmétique de Simon Stevin de Bruges. Revue, corrigée et augmentée de plusieurs Traitez, par Albert Girard... A Leyde, de l'Imprimerie des Elzevier. M. DC. XXV ; p. 100.

Les Œuvres mathématiques de Simon Stevin de Bruges... A Leyde, chez Bonaventure et Abraham Elzevier... M. DC. XXXV, t. I, p. 25.

(3) *Invention nouvelle en l'Algèbre, par Albert Girard, Mathématicien.* A Amsterdam, chez Guillaume Iansson Blaeuw. M. DC. XXIX f(E4) r°. Réimprimé en fac-simile, par D. Bierens de Haan, Leiden, Muré, 1884.

(4) *L'Arithmétique de Iaques Peletier du Mans, Départie en quatre livres.* Troisième édition revue et augmentée. Par Ian de Tournes. M. DC. XII. A Cologne ; p. 178.

Je n'ai vu que cette seule édition, mais il y en a plusieurs autres, notamment : Poitiers, 1548, 1549 et 1552 ; Lyon, 1554 et 1570.

Peletier est aussi l'auteur d'une *Algèbre* beaucoup trop oubliée, sur laquelle j'ai essayé d'appeler l'attention dans un article publié dans cette REVUE (1907, t. LXI, pp. 117-173) : *L'Algèbre de Iacques Peletier du Mans départie en deus* (sic) *livres*.

Quant à Pascal, pas n'est besoin de beaucoup de recherches pour découvrir à qui il l'a emprunté. Pierre Hérigone le donne au tome II de son *Cursus Mathematicus* (1), afin de « trouver promptement, dit-il, quelconque puissance d'un binôme ou résidu » (2). Or, lorsque Pascal traitera le même sujet dans les *Usages du Triangle arithmétique*, il terminera par cette phrase l'application aux puissances des binômes et des apotomes (3) : « Je ne donne pas la demonstration de tout cela, parce que d'autres en ont dejà traité, comme Herigone, outre que la chose est evidente d'elle-mesme ». Au XVIIe siècle, à bon entendeur pareille indication suffisait. Il n'entrait pas dans les habitudes de mieux préciser les sources.

Convient-il, en conséquence, de débaptiser du nom de Pascal le Triangle arithmétique ?

Joseph Bertrand (4) plaisante spirituellement quelque part le travers qu'ont certains professeurs d'accoler un nom propre à chaque théorème. Quelle verve n'eût-il pas mise à ridiculiser une attribution erronée ? Il semblerait qu'il vaille donc mieux ne plus parler du Triangle de Pascal. Mais le grand historien Cantor (5) ne partage pas cet avis.

(1) *Cursus Mathematici Tomus secundus... Tome second du Cours de Mathématiques. Contenant l'Arithmétique pratique : Le Calcul Ecclésiastique : et L'Algèbre tant vulgaire que spécieuse, avec la méthode de composer et faire les démonstrations par le retour ou répétition des vestiges de l'Analyse.* Par Pierre Hérigone, Mathématicien. A Paris, M. DC. XXXIV, chez l'Auteur... et chez Henry le Gras, pp. 16-18 de la 2e pagination du volume.

On sait que cet ouvrage est imprimé à la fois en français et en latin, dans des colonnes en regard.

(2) « Résidu », c'est-à-dire, binome de la forme a-b.

(3) *Pascal*, t. III, p. 503.

(4) *Eloges Académiques*, Nouvelle série. Paris, Hachette, 1902. Dans l'Eloge historique de Michel Chasles, pp. 56-57.

(5) *Vorlesungen*, t. II, p. 750.

Dans leur « Introduction » au Traité du Triangle Arithmétique (*Pascal*, t. III, p. 441), MM. L. Brunschvicg et Boutroux donnent encore ce détail intéressant :

« Notons une rencontre curieuse qui est sans doute un effet du hasard. Le Triangle arithmétique de Pascal se trouve dans l'ouvrage d'un Jésuite espagnol, publié à Lyon en 1659 : le *Pharus scientiarum* du R. P. Sébastien Izquierdo, Disputatio XXIX, *de Combinatione*.

$$
\begin{array}{ccccc}
a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & a^1_4 & a^1_5 \\
a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 & a^2_4 & \\
a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 & & \\
a^4_1 & a^4_2 & & & \\
a^5_1 & & & &
\end{array}
$$

L'auteur donne aux numéros d'ordre des cellules, remplacés, dans notre tableau, par les indices tant supérieurs qu'inférieurs, le nom d'*exposants*, auquel il ne faut attacher aucune idée d'élévation aux puissances. Il nomme les lignes horizontales, *cellules d'un même rang parallèle* ; les colonnes verticales, *cellules d'un même rang perpendiculaire* ; les diagonales qui joignent deux cellules extrêmes à indices permutés a^1_n, a^n_1, *cellules d'une même base* ; les cellules d'une même base équidistantes de ses extrémités, a^q_p, a^p_q, *cellules réciproques* ; enfin la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur ses bases et qui traverse en diagonale les cellules a^n_n dont les indices sont égaux entre eux se nomme *dividende*, et les cellules traversées par cette perpendiculaire, *cellules de la dividende*.

Le nombre a^1_1 qui occupe la cellule du sommet de l'angle droit, et dont tous les autres se déduisent, est le *générateur* du Triangle. Chez les prédécesseurs de Pascal, le générateur était toujours l'unité ; quant à lui, il choisit un nombre arbitraire, dit-il, ce qu'il n'entend cependant que d'un nombre entier et positif.

Dès le principe, le Triangle arithmétique se forma partout d'après une même règle. Pascal, qui la lut dans Hérigone (1), la formule comme suit :

« Le nombre de chaque cellule est egal à celuy de la cellule qui le precede dans son rang perpendiculaire, plus à celuy de la cellule qui le precede dans son rang parallele » (2).

m'engagent à les supprimer. Elles sont d'ailleurs inutiles à la clarté des raisonnements.

(1) *Vol. cité*, p. 18.

(2) *Pascal*, t. III, p. 448. La loi de formation du tableau s'exprime algébriquement par

$$a^p_q = a^p_{q-1} + a^{p-1}_q.$$

Pour déterminer les cellules qui précèdent une cellule donnée, il faut, cela va de soi, suivre l'ordre naturel des indices.

« D'où se tirent plusieurs consequences, continue Pascal. En voicy les principales où je considere les triangles dont le generateur est l'unité, mais ce qui s'en dira conviendra à tous les autres.

» CONSEQUENCE PREMIERE. — En tout triangle arithmetique, toutes les cellules du premier rang parallele et du premier rang perpendiculaire sont pareilles à la generatrice.

» Car, par la construction du triangle, chaque cellule est egale à celle qui la precede dans son rang perpendiculaire, plus à celle qui la precede dans son rang parallele. Or, les cellules du premier rang parallele n'ont aucunes cellules qui les precedent dans leurs rangs perpendiculaires ; ny celles du premier rang perpendiculaire dans leurs rangs paralleles. Donc, elles sont toutes egales entre elles, et partant au premier nombre generateur. »

Un géomètre du temps, qui se serait piqué de rigueur, eût probablement fait difficulté pour souscrire à ce raisonnement; car la correction lui eût semblé exiger une règle distincte pour la formation de la première ligne et de la première colonne. Ceci soit dit en passant, sans y insister.

Les *Conséquences*, dont nous venons de parler, sont au nombre de dix-neuf. Il faut y remarquer la douzième, l'un des plus beaux fleurons de la couronne mathématique de Pascal.

« CONSEQUENCE DOUZIESME. — En tout triangle arithmetique, deux cellules contigues estant dans une mesme base, la superieure est à l'inferieure, comme la multitude des cellules depuis la superieure jusques au haut de la base, à la multitude de celles depuis l'inferieure jusques en bas inclusivement » (1).

(1) *Pascal*, t. III, pp. 455-457. Algébriquement la formule s'exprime par

$$\frac{a_{q+1}^{p}}{a_{q}^{p+1}} = \frac{p}{q}$$

Dans le traité *De combinationibus*, la proposition 5 exprime la même propriété (*Pascal*, t. III, p. 573) sous la forme

$$\frac{C_m^p}{C_m^{p-1}} = \frac{m-p+1}{p}.$$

La proposition est belle en elle-même. Pascal l'a publiée le premier. Il ne faudrait, cependant, pas en surfaire la nouveauté, car Fermat, par exemple, la connaissait depuis longtemps.

Ce qui est propre à Pascal, ce qui est une trouvaille de sa plume d'artiste, c'est le tour nouveau qu'il donne à l'antique raisonnement par induction complète employé pour démontrer le théorème ; je veux dire, la forme par récurrence que nous donnons ordinairement aujourd'hui à cette induction. Que si, contrairement à l'avis de Bertrand, on approuvait l'habitude de donner un nom de savant aux principaux théorèmes, peut-être pourrait-on appeler l'induction par récurrence, *induction de Pascal* ? J'y ai fait allusion ci-dessus. Le Clermontois vaut la peine d'être entendu dans son langage un peu archaïque.

« Quoyque cette proposition ait une infinité de cas, j'en donneray une demonstration bien courte, en supposant 2 lemmes.

» Le 1 qui est evident de soy-mesme, que cette proposition se rencontre dans la seconde base ; car, il est bien visible que a_2^1 est a_1^2 comme 1 à 1. »

Cela résulte, en effet, de la première conséquence, que j'ai transcrite ci-dessus.

« Le 2, que si cette proposition se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera necessairement dans la base suivante.

» D'où il se voit qu'elle est necessairement dans toutes les bases. Car elle est dans la seconde base par le premier lemme ; donc, par le second elle est dans la troisiesme base ; donc dans la quatriesme et à l'infiny. »

Les calculs intermédiaires n'intéresseraient peut-être pas plusieurs de nos lecteurs. Je les renvoie dans une note du bas de la page (1). Il suffit d'observer que Pascal n'y invoque

(1) Si la proposition est vérifiée dans une base quelconque, par exemple, la quatrième, elle le sera nécessairement dans la cinquième.

Par hypothèse $\frac{a_1^4}{a_2^3} = \frac{1}{3}$; d'où $\frac{a_1^4 + a_2^3}{a_2^3} = \frac{4}{3}$.

que l'hypothèse et la loi de formation du triangle. Mais comme il a raisonné sur deux bases concrètes, la quatrième et la cinquième, il conclut la démonstration en la résumant comme suit :

« On le monstrera de mesme dans tout le reste, puisque cette preuve n'est fondée que sur ce que cette proposition se trouve dans la base precedente, et que chaque cellule est egale à sa precedente, plus à sa superieure, ce qui est vray partout. »

Tel est le raisonnement de Pascal (1).

Tout admirable qu'il est, il faut cependant reconnaître une fois de plus, que le Clermontois y déploye plus d'Esprit de Géométrie que d'Esprit de Finesse. L'Induction complète était une méthode aussi ancienne que la Géométrie elle-

Mais, d'après la loi de formation du triangle, $a_1^4 + a_2^3 = a_2^4$;

d'où $$\frac{a_2^4}{a_2^3} = \frac{4}{3}. \qquad \text{(I)}$$

De même, par hypothèse, $\frac{a_2^3}{a_3^2} = \frac{2}{2}$; d'où $\frac{a_2 + a_3^2}{a_2^3} = \frac{4}{2}$.

Mais, $a_2^3 + a_3^2 = a_3^3$

donc $$\frac{a_3^3}{a_3^2} = \frac{4}{2} \qquad \text{(II)}$$

Divisant membre à membre (I) par (II),

$$\frac{a_2^4}{a_3^3} = \frac{2}{3}.$$

C. Q. F. D.

(1) Pascal se sert plusieurs fois de la méthode d'induction par récurrence. Il l'avait déjà employée pour démontrer la *Conséquence cinquième.* « En tout triangle arithmetique, chaque cellule est egale à sa reciproque. » Algébriquement : $a_q^p = a_p^q$.

Mais, c'est dans la démonstration précédente qu'il la formule pour la première fois explicitement comme règle générale à suivre.

Il y revient de nouveau pour démontrer la première proposition de l'*Usage du Triangle arithmétique pour les Combinaisons* (*Pascal*, t. III, pp. 474-476).

même. Les Grecs la connaissaient et l'employaient souvent. Mais, de sa plume magique, Pascal lui donne un tour nouveau, lumineux, simple et alerte, qui est demeuré définitif.

Le lecteur en conclura, peut-être, que la nouvelle forme donnée à la méthode de l'induction complète fit aussitôt fortune ?

Qu'il ne se hâte pas trop. Elle passa au contraire presque inaperçue. Par une de ces bizarreries, dont l'histoire des mathématiques nous offre maint exemple, elle fut même si peu remarquée, que vingt et un ans plus tard, dans le cahier de juillet 1686 des ACTA ERUDITORUM (1), Jacques Bernoulli croyait visiblement l'inventer pour rendre rigoureux un raisonnement par induction incomplète de Wallis (2).

(1) Lipsiae... Typis Christophori Guntheri, 1686 ; pp. 360-361. *Dn. Bernouilli demonstratio rationum quas habet series numerorum naturali progressione sese insequentium, vel quadratorum, cubicorum, etc., item trigonalium, pyramidalium, etc., ad series numerorum totidem maximo aequalium.* Le raisonnement dont il s'agit, se trouve dans l'*Arithmetica infinitorum* qui parut, pour la première fois, dans les *Johannis Wallisii SS. Th. D. geometriae Professoris Savilliani in celeberrima Academia Oxoniensi, Operum mathematicorum Pars altera*... Oxoniae, Typis Leon. Lichfield... 1656. (Bibl. Roy. de Belgique.)

(2) Il n'y a pas lieu d'analyser ici plus au long le Traité du Triangle Arithmétique. Si le lecteur désirait en savoir davantage, je le prierais de lire une Note que j'ai envoyée à MATHESIS et qui y paraîtra dans le numéro de décembre 1923 (t. XXXVII, Bruxelles, Stevens). J'y donne, en notations modernes, les énoncés des dix-neuf « conséquences » du Traité, avec un résumé de leurs solution.

Voici cependant encore un détail bibliographique intéressant relatif à l'opuscule de Pascal. Le tome III du *Pascal* de la « Collection des Grands Écrivains de France » avait paru, quand les éditeurs eurent la surprise de découvrir à la Bibliothèque de Clermont, parmi les reliques de Pascal, un texte latin du Traité du Triangle, qui était déjà tout imprimé, comme l'était le texte français qu'on avait jadis trouvé imprimé dans les papiers de l'auteur.

Ce texte latin semble nous avoir conservé la rédaction primitive de Pascal et nous fournir la solution d'une énigme. On avait remarqué de longue date, que lorsque dans ses *Combinationes*, Pascal cite son Traité du Triangle, les références sont trop faibles d'une unité. Or le texte latin n'a que dix-huit « conséquences », au lieu des dix-neuf du texte français, car les « conséquences » deux et trois y sont réunies sous le numéro 2. C'est donc au texte latin que Pascal ren-

Je dépasserais les bornes imposées à cet article, en analysant en détail les *Divers usages du Triangle arithmétique dont le générateur est l'unité.*

Il y a d'abord l'*Usage du Triangle arithmétique pour déterminer les partys qu'on doit faire entre plusieurs joueurs qui jouent plusieurs parties.* C'est le plus important de ces usages à cause de la place qu'il tient dans l'histoire du Calcul des Probabilités. Mais, le R. P. Lefebvre vient récemment de résumer ici même l'histoire des origines de ce Calcul dans une étude bien documentée (1). Il serait oiseux d'y revenir. Cependant il convient de signaler un élégant emploi d'induction complète par récurrence dans la solution du Problème I (2).

L'*Usage du Triangle arithmétique pour trouver les puissances des binômes et des apotomes*, c'est-à-dire des binômes de la forme $a-b$, exigerait d'assez longs développements

voie dans ses *Combinationes*, et comme il n'y fait aucune mention du texte français, il est assez naturel d'admettre qu'il ne l'avait pas encore rédigé.

Le texte latin du Triangle Arithmétique a été réédité, sous le titre de *Triangulus Arithmeticus*, dans *Pascal*, t. XI, pp. 366-380.

(1) T. LXXXII, 1922, pp. 342-364.

(2) *Pascal*, t. III, pp. 488-493.

Ce raisonnement, trop long pour être donné ici, n'offre aucune difficulté, à condition toutefois de se rappeler quelques-unes des « Conséquences » démontrées dans le *Traité du Triangle arithmétique* proprement dit.

En langage et en notations modernes, le Problème I peut s'exprimer comme suit : Soient p et q le nombre de parties qui manquent respectivement aux deux joueurs pour gagner l'enjeu. Posons $p + q = m + 1$. Leurs chances sont proportionnelles aux nombres

$$1 + m + \frac{m(m-1)}{1.\,2} + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-q+2)}{(q-1)\,!},$$

et

$$1 + m + \frac{m(m-1)}{1.\,2} + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-p+2)}{(p-1)\,!}.$$

relatifs à la préhistoire du binôme de Newton, qu'il vaut mieux réserver plutôt pour un article spécial. A noter que Pascal se contente d'énoncer la règle de formation des coefficients sans la démontrer.

Le but du *Traité des nombres continus* est de faire connaître un mode d'extraction de la racine n^e d'un nombre. Le procédé est original, mais semble peu pratique. Pascal en omet de nouveau la démonstration, parce qu'elle est facile, dit-il, mais longue et ennuyeuse.

Quant à l'*Usage du Triangle pour les Combinaisons*, il est traduit textuellement dans le *De Combinationibus*, dont il forme la première partie. Ce dernier débute par plusieurs lemmes (1). Une fois ceux-ci établis, il s'ensuit que les pro-

(1) Voici les quatre premiers en notations modernes :

Lemme 1 C_m^{m+p} est impossible.

Lemme 2 $C_m^m = 1$.

Lemme 3 $C_m^1 = m$.

Lemme 4 $C_m^p = C_{m-1}^p + C_{m-1}^{p-1}$.

Ce dernier ne diffère de la loi de formation du Triangle arithmétique que par la notation. Pascal le démontre par la remarque suivante :

Supposons formées toutes les combinaisons simples de m objets, ou, pour préciser, de m lettres prises p à p. En notation moderne, elles sont au nombre de C_m^p.

Or, ces combinaisons peuvent se diviser en deux groupes :

1° Celui des combinaisons qui renferment une certaine lettre, a par exemple, et qui sont au nombre de C_{m-1}^{p-1}.

2° Celui des combinaisons qui ne renferment pas cette lettre et qui sont au nombre de C_{m-1}^p.

Je n'oserais affirmer que ce raisonnement resté classique est dû à Pascal. (*Pascal*, t. III, pp. 471-474 et 558-560).

Dans le problème qui termine le traité *De combinationibus* (*Pascal*, t. III, pp. 588-593), Pascal établit la formule

$$C_m^p = \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.\,2.\,3\ldots p} C_m^{p-1}$$

qu'il attribue à de Gagnières. C'est donc à tort que l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées* (édition française,

priétés des combinaisons données dans ce traité par Pascal, ne sont plus que les *Conséquences* du Triangle arithmétique appliquées au cas particulier où le générateur est l'unité. Mais, Pascal, qui n'a pas exprimé les 19 *Conséquences* sous une forme algébrique, ne peut pas se contenter de cette remarque. Son traité *De Combinationibus* a l'étendue de celui du *Triangle arithmétique*, dont il n'est guère qu'une répétition en termes différents.

Restent les *Nombres figurés* ou, comme les nomme Pascal, les *Ordres numériques* (1). J'en dirai un mot à la fin de ce chapitre, après les *Petits Traitez* ajoutés à celui du *Triangle*.

Ces *Traitez*, au nombre de deux, sont écrits en latin.

Le premier, le moins important, est intitulé *De numeris multiplicibus ex sola characterum cognitione agnoscenda*,

Paris, Gauthier-Villars, tome I, vol. I, fasc. 1, p. 84) dit que Pascal n'a pas donné la formule C_m^p sous la forme d'un produit.

(1) On sait que, par définition, les *Nombres figurés du premier ordre* sont la suite des Nombres naturels. Si on fait les sommes successives des Nombres figurés du premier ordre, en commençant chaque fois par l'unité et en les arrêtant successivement aux nombres 1, 2, 3,...*n*, on obtient les *n* premiers Nombres figurés du *second ordre*. Si on fait d'une manière analogue la somme des Nombles figurés du second ordre, on obtient ceux du troisième et ainsi de suite.

De sa loi de formation du Triangle arithmétique, Pascal avait déduit comme *Conséquence seconde*, (Pascal, T. III, p. 449), qu' « en tout Triangle arithmetique, chaque cellule est egale à la somme de toutes celles du rang parallele precedent, comprises depuis son rang perpendiculaire jusques au premier inclusivement. » Algébriquement,

$$a_q^p = a_1^{p-1} + a_2^{p-1} + \ldots + a_q^{p-1}.$$

Considérons le Triangle dont le générateur est l'unité et achevons le carré

1	1	1	1
1	2	3	4
1	3	6	10
1	4	10	20

Nous remarquerons, d'après cette « conséquence », que les lignes horizontales et les colonnes verticales à partir de la seconde donnent les nombres figurés des divers ordres.

c'est-à-dire, en traduction un peu libre, caractère de divisibilité des nombres déduit de la somme de leurs chiffres.

Pascal commence par dire que le caractère de divisibilité par 9 est connu de temps immémorial. Il l'énonce, puis il ajoute (1) :

« Bien que cette règle soit communément employée, je ne crois pas que personne jusqu'à présent en ait donné une démonstration, ni ait cherché à en généraliser le principe. Dans ce petit traité je justifierai le caractère de divisibilité par neuf et plusieurs autres analogues. J'exposerai aussi une méthode générale, qui permet de reconnaître à la seule inspection de la somme de ses chiffres, si un nombre donné est divisible par un autre nombre quelconque. Cette méthode s'applique, non seulement à notre système décimal de numération, — système qui repose, non sur une nécessité naturelle, comme le pense le vulgaire, mais sur une convention, d'ailleurs assez malheureuse (et sane satis inepte posita est) — mais encore à tout système de numération ayant pour base tel nombre qu'on voudra. »

Ainsi donc, d'après Pascal, la base 10 de notre système de numération est purement conventionnelle et même assez mal choisie. Voilà une remarque neuve et digne de lui (2). Mais, c'est à peu près tout ce qu'il faille retenir du traité.

Le caractère de divisibilité par 9, qu'on y lit, se déduit d'un caractère de divisibilité général, qui est de l'invention de Pascal et qu'on trouve encore dans nos arithmétiques comme généralisation du caractère de divisibilité par 9 (3). Il n'a pas grande importance en lui-même, et Pascal l'établit un peu péniblement. Il en déduit cependant quelques

(1) *Pascal*, T. III, pp. 315-317.

(2) C'est à Jean Caramuel y Lobkowitz, Luxembourgeois d'origine, qui naquit à Madrid, mais séjourna longtemps en Belgique, que Cantor (*Vorlesungen*, t. II, p. 771) attribue la considération des diverses bases de numération. Caramuel l'expose systématiquement dans sa *Mathesis biceps vetus et nova*, qui parut en 1670, donc postérieurement au *Traité du Triangle arithmétique*. Je n'ai pas vu cet ouvrage. Quetelet qui consacre quelques pages à Caramuel, dans son *Histoire des Sciences mathématiques et physiques chez les Belges* (t. I, Bruxelles, Hayez, 1864, pp. 225-226) ne semble pas non plus connaître la *Mathesis biceps*.

(3) Par exemple, *Traité d'arithmétique*... par l'abbé Gelin, 9e éd., Namur, Wesmael-Charlier, 1909 ; p. 102, n° 149,

conséquences intéressantes pour l'époque. Celle-ci, par exemple, que le caractère de divisibilité par 11, dans la base 12, est le même que le caractère de divisibilité par 9 dans la base 10 ; puis cet autre : dans la base 10, un nombre est divisible par 11, si la somme des chiffres de rang impair, augmentée du décuple de la somme des chiffres de rang pair, est un multiple de 11.

Le deuxième *Petit traité* a une tout autre valeur. Pascal l'intitule *Potestatum numericarum summa*, Sommation des puissances numériques. Dans le corps de l'ouvrage, il parle un langage plus moderne et dit : « Sommation des puissances semblables des termes d'une progression quelconque » (1) ; mais il faut l'entendre seulement des progressions arithmétiques, dont le premier terme et la raison sont arbitraires. Le but réel du traité ne nous est cependant donné que dans la conclusion. La voici (2) :

« *Conclusion*

« Ceux qui sont tant soit peu au courant de la doctrine des *indivisibles*, ne manqueront pas de voir quel parti on peut tirer des résultats qui précèdent pour la détermination des aires curvilignes. Ces résultats permettront de quarrer immédiatement tous les genres de paraboles et une infinité d'autres courbes.

« Si donc, nous étendons aux quantités continues — nous disions aujourd'hui, si nous passions à la limite, — les résultats trouvés pour les nombres par la méthode ci-dessus exposée, nous pourrons énoncer les règles suivantes. »

Pascal les donne séparément pour la somme des premières puissances, celle des carrés, et celle des cubes ; puis il la formule, pour une puissance entière et positive quelconque, en « *Règle générale relative à la progression naturelle qui commence par l'unité* » :

« La somme des mêmes puissances d'un certain nombre de lignes, est à la puissance de degré immédiatement supérieur de la plus grande d'entre elles, comme l'unité est à l'exposant de cette même puissance » (3).

(1) *Pascal*, t. III, pp. 352-353.
(2) *Ibid.*, t. III, pp. 364-365.
(3) Il faut remarquer que Pascal ne précise pas dans l'énoncé de la règle qu'elle doit s'entendre de la limite de la somme, nuance que j'ai introduite dans la formule pour rendre celle-ci correcte.

C'est-à-dire, en notation algébrique :

$$\lim_{n=\infty} \sum_0^a n^m = \frac{1}{m+1} \cdot a^{m+1}.$$

En réalité, la formule n'était pas neuve. Fermat, Roberval et Cavalieri la possédaient et l'avaient trouvée, chacun de son côté, sans l'emprunter à Pascal. Cavalieri l'avait même publiée, dès 1639, à la fin de sa *Centuria di varii problemi* (1) et, en 1644, il en avait donné la démonstration, par des méthodes géométriques compliquées, dans ses *Exercitationes geometricae sex* (2).

Pascal connaissait-il la *Centuria* et les *Exercitationes* ? Peut-être. Mais, il est muet sur ce sujet et la question est probablement insoluble. Quoi qu'il en soit, en 1654 ses idées sur la nature des indivisibles sont encore confuses, pour ne pas dire plus, et visiblement empruntées à la *Géométrie* de Cavalieri (3).

« Je ne m'arrêterai pas aux autres cas, ajoute-t-il, après avoir formulé la Règle générale que nous venons de rapporter, parce que ce n'est pas ici le lieu de les étudier. Il me suffira d'avoir énoncé en passant les règles qui précèdent. On découvrira les autres sans difficulté en s'appuyant sur ce principe, qu'*on n'augmente pas une grandeur continue, lorsqu'on lui ajoute, en tel nombre que l'on voudra, des grandeurs d'un ordre d'infinitude supérieur*. Ainsi, les points n'ajoutent rien aux lignes, les lignes aux surfaces, les surfaces aux solides. »

C'est clair. Les indivisibles sont rigoureusement nuls. Ce sont des indivisibles au sens de Cavalieri.

(1) *Centuria Di Varii Problemi, Per dimostrare l'uso, e la facilità de' Logarithmi*... di F. Bonaventura Cavalieri. In Bologna, M. DC. XXXIX. Per Giacomo Monti e Carlo Zenero, pp. 523-526.
(2) Bononiae, typis Iacobi Montii, 1647, pp. 268-291 (Univ. de Gand). J'ai consacré une étude détaillée à la démonstration de Cavalieri : *Un chapitre de l'Œuvre de Cavalieri. Les propositions XVI-XXVII de l'Exercitatio tertia*. MATHESIS, t. XXXVI, Bruxelles, Stevens, 1922 ; pp. 365-373, 446-456.
(3) *Pascal*, t. III, 366-367. Voir *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*. Authore F. Bonaventura Cavaliero... Bononiae, typis Clementis Ferronii, M. DC. XXV ; passim.

« Je mettrai ici sans démonstration une proposition très belle et très remarquable que j'ai découverte.

« Dans la progression naturelle, commençant à l'unité, le produit d'un nombre quelconque par le nombre immédiatement supérieur, fait le double du triangle du premier nombre. Si le multiplicateur est le triangle du nombre immédiatement supérieur, on a le triple de la pyramide du premier nombre. Si c'est la pyramide du nombre immédiatement supérieur, on a le quadruple du triangulo-triangulaire du premier nombre ; et ainsi de suite indéfiniment suivant une règle uniforme et générale.

« J'estime qu'on ne peut énoncer sur les nombres un théorème qui soit plus beau ou plus général. Je n'ai ni le temps, ni la place d'en mettre la démonstration sur cette marge. »

En 1654, Pascal trouva lui aussi ce beau théorème et crut à tort qu'il l'avait découvert, à l'heure même où Fermat le formulait de son côté. Mais avant de raconter l'assaut de politesse auquel cette méprise donna lieu entre les deux savants, il nous faut fixer approximativement la date de la trouvaille de Fermat.

Elle n'est certainement pas postérieure à 1636, car au cours du mois de septembre de cette année (1), il la communiquait à Mersenne pour être transmise à Sainte-Croix, et le 4 novembre suivant, il la faisait connaître lui-même à Roberval (2). Fermat devançait donc Pascal de dix-huit ans au moins.

Informer Mersenne d'une découverte, c'était la publier par l'Europe entière. Le Minime jouait alors entre savants le rôle d'intermédiaire que tiennent maintenant nos recueils périodiques. Fermat devait croire que son théorème était connu par tous ceux qui s'intéressaient aux Nombres. Il ne pouvait surtout soupçonner que Pascal, avec lequel il était

Henry... t. I, Paris, Gauthier-Villars, 1891, p. 341. Voir la traduction par Paul Tannery que j'ai reproduite t. III, 1896, p. 273.

Les théorèmes de Fermat reviennent à dire que les Nombres figurés sont donnés par les formules suivantes dans lesquelles on fait successivement $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$

$$n \quad \frac{n(n+1)}{2}, \quad \frac{n(n+1)(n+2)}{2, 3}, \quad \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2, 3, 4}, \text{ etc.}$$

(1) *Œuvres de Fermat*, t. II, 1894, p. 70.

(2) *Ibid.*, t. II, pp. 84-85.

lié d'amitié, l'ignorait. C'est cependant ce qui arriva, car dans la XIe proposition du *Traité des Ordres numériques* (1) Pascal s'exprimait en ces termes :

« Un nombre, de quelque ordre que ce soit, estant multiplié par la racine precedente et divisé par l'exposant de son ordre, donne pour quotient le nombre de l'ordre suivant qui procede de cette racine. »

Les racines dont il est ici question sont les premières puissances des nombres naturels. C'est donc bien là un nouvel énoncé du théorème de Fermat. Mais, voici le commentaire inattendu qui l'accompagne :

« Les manieres de tourner une mesme chose sont infinies : en voicy un illustre exemple, et bien glorieux pour moi. Cette mesme proposition que je viens de rouler en plusieurs sortes, est tombée dans la pensée de notre celebre conseiller de Toulouse, Monsieur de Fermat ; et, ce qui est admirable, sans qu'il m'en eust donné la moindre lumiére, ny moy à luy, il escrivoit dans sa Province ce que j'inventois à Paris, heure pour heure, comme nos lettres ecrites et receües en mesme temps le témoignent. Heureux d'avoir concouru en cette occasion, comme j'ay fait encore en d'autres d'une maniere tout à fait estrange, avec un homme si grand et si admirable, et qui dans toutes les recherches de la plus sublime geometrie, est dans le plus haut degré d'excellence, comme ses ouvrages que nos longues prieres ont enfin obtenus de luy, le feront bientost voir à tous les geometres de l'Europe, qui les attendent ! La maniere dont il a pris cette mesme proposition est telle. »

Les termes que Pascal prête ici à Fermat diffèrent de ceux qui se lisaient dans la marge de l'exemplaire de Diophante

(1) *Pascal*, t. III, pp. 509-511. L'exposant, dont il s'agit ici, est celui du Triangle arithmétique, supérieur d'une unité au numéro de l'ordre des nombres figurés. De plus, après les mots « qui procède de cette racine », il faut sous-entendre le mot « précédente ». Donc, en représentant par F_k^n le n^e nombre figuré du k^e ordre, son exposant est $k+1$, et la règle de Pascal s'exprime par la formule

$$F_k^n \times \frac{n-1}{k+1} = F_{k+1}^{n-1}.$$

La démonstration est omise ici, mais elle a été donnée dans les Conséquences 13 et 14 du *Traité du Triangle arithmétique (Pascal*, t. III, pp. 457-458).

du conseiller au Parlement de Toulouse. Je les transcris, car ils sont « tournés » de façon particulièrement heureuse et claire.

« *En la progression naturelle qui commence par l'unité, un nombre quelconque estant mené* (c'est-à-dire, multiplié) *dans le prochainement plus grand, produit le double de son triangle.*

» *Le mesme nombre estant mené dans le triangle du prochainement plus grand, produit le triple de sa pyramide.*

» *Le mesme nombre mené dans la pyramide du prochainement plus grand, produit le quadruple de son triangulo-triangulaire ; et ainsi à l'infiny par une methode generale et uniforme* » (1).

Après avoir fait connaître ce théorème de Fermat, Pascal continue en disant :

« Voilà comment on peut varier les enonciations. Ce que je monstre en cette proposition s'entendant de toutes les autres, je ne m'arresteray plus à cette maniere accomodante de traitter les choses, laissant à chacun d'exercer son genie en ces recherches où doit consister toute l'estude des geometres : car, si on ne sçait pas tourner les propositions à tous sens et qu'on ne se serve que du premier biais qu'on a envisagé, on n'ira jamais bien loing. Ce sont ces diverses routes qui ouvrent les consequences nouvelles et qui par des enonciations assorties au sujet, lient des propositions qui sembloient n'avoir aucun rapport dans les termes où elles estoient conceues d'abord. »

Réflexion fort juste. Mais, encore une fois, les coïncidences de temps sur lesquelles appuie Pascal sont erronées. Loin de trouver sa formule en même temps que le géomètre de

(1) D'après la traduction littérale de cet énoncé, les Nombres figurés sont donnés par les formules

$$\frac{n}{2}(n+1)\,;\quad \frac{n}{3}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2}\,;\quad \frac{n}{4}\cdot\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2\cdot 3}\,;$$

ou, en représentant comme nous l'avons fait plus haut par F_k^n le n^e nombre figuré du k^e ordre,

$$F_k^n = \frac{n}{k}\cdot F_{k-1}^{n+1}$$

formule qui ne diffère de celle de Pascal que par le changement de n en $n-1$ et de k en $k+1$.

Paris, celui de Toulouse la possédait, nous l'avons dit, depuis dix-huit ans au moins.

En cette conjoncture inattendue, voire mystifiante pour tout autre que Fermat, — car Pascal lui avait envoyé son Traité du Triangle, — on admire la délicatesse de la réponse. Quel autre n'eût réclamé des droits de priorité ? Fermat n'y songe pas (1).

« Monsieur,

» Nos coups fourrés continuent toujours, et je suis aussi bien que vous dans l'admiration de quoy nos pensées s'ajustent si exactement qu'il semble qu'elles ayent pris une mesme route et fait un mesme chemin. Vos derniers Traitez du Triangle arithmetique et de son application en sont une preuve authentique, et si mon calcul ne me trompe, votre onzieme consequence (2) couroit la poste de Paris à Toloze, pendant que ma proposition des nombres figurez, qui en effet est la mesme, alloit de Toloze à Paris. »

Il n'y a pas lieu de douter de ce croisement de lettres, puisque Fermat l'affirme. Mais, notons le soin avec lequel le Toulousain s'abstient de toute allusion à ses communications de 1636 à Roberval et à Mersenne.

« Je n'ay garde de faillir tandis que je rencontreray de cette sorte, ajoute-t-il, et je suis persuadé que le vray moyen pour s'empescher de faillir est celuy de concourir avec vous (3). Mais, si j'en disois davantage, la chose tiendroit du compliment, et nous avons banni cet ennemi des conversations douces et aisées. »

(1) *Œuvres de Fermat*, t. II, pp. 307-308 ; *Pascal*, t. III, p. 417. La lettre est datée de Toulouse, 29 août 1654.

(2) Pour des raisons de paléographie, MM. Brunschvicg et Boutroux adoptent la leçon « douzième ». MM. Paul Tannery et Charles Henry conservent, avec raison, me semble-t-il, la leçon ancienne « onzième ». Il s'agit bien, en effet, de la proposition XI du présent Traité.

(3) Nous avons entendu ci-dessus Pascal se féliciter d'avoir enfin décidé Fermat à publier ses Œuvres. Le Toulousain l'avait prié, en retour, de bien vouloir collaborer à cette publication que les absorbantes occupations de sa charge de Conseiller lui rendaient difficile. C'est à cette demande qu'il est fait ici allusion. On sait que Pascal ne crut pas devoir accepter. Après l'accident du pont de Neuilly qui survint peu après, il prit la décision d'abandonner l'étude des mathématiques.

Voilà bien le prince des géomètres de l'époque, le grand Fermat dans toute la noblesse de son caractère. Comme plus d'un homme vraiment supérieur, il était modeste et croyait volontiers au talent des autres, parfois même trop facilement. Ne se laissa-t-il pas un jour tromper sur celui de Jean de Beaugrand, qu'il avait fait le dépositaire de ses papiers de mathématiques ? Mais, pour Pascal, il voyait juste et l'estimait en connaissance de cause. Témoin ces lignes, qu'il écrivait vers la même date à Carcavi en lui recommandant son jeune émule :

« Je vous réponds à l'avance, qu'il trouvera des choses, non seulement nouvelles et jusqu'ici inconnues, mais encore surprenantes » (1).

IV

Les traités publiés après le concours de la Roulette (2)

Au mois de juin 1658 paraissait à Paris une petite plaquette in-4° anonyme, imprimée sans lieu, ni date, ni adresse de l'éditeur. Elle est devenue rarissime, mais la Bibliothèque de Clermont et la Bibliothèque Nationale de Paris en possèdent des exemplaires. Tout le monde sait

(1) *Œuvres de Fermat*, t. II, p. 299. La lettre est de Toulouse, 9 août 1654. Je l'ai reproduite ici même en entier, dans mon article, *La publication des inédits de Fermat*. (T. LXXXIII, 1923, pp. 427-428.)

(2) Ils parurent sous la forme d'une brochure in-4° intitulée :

Lettre de A. Dettonville à Monsieur de Carcavy, en luy envoyant Vne Methode generale pour trouuer les Centres de Grauité de toutes sortes de grandeurs. Vn Traitté des Trilignes et de leurs Onglets. Vn Traitté des Sinus du quart de Cercle. Vn Traitté des Arcs de Cercle. Vn Traitté des Solides circulaires. Et enfin vn Traitté general de la Roulette, Contenant La solution de tous les Problemes touchant La Roulette qu'il auoit proposez publiquement au mois de Iuin 1658. *A Paris, M. DC. LVIII.*

Reproduit en fac-simile dans *Pascal*, t. VIII, p. 326.

Amos Dettonville est l'anagramme de Louis de Montalte, pseudonyme sous lequel Pascal publia les *Provinciales*.

A la fin de l'opuscule on trouve un petit traité qui n'est pas mentionné dans le titre, peut-être parce qu'il est étranger à la cycloïde :

Lettre de A. Dettonville à Monsieur A. D. D. S. en luy envoyant

aujourd'hui que l'auteur en était Pascal, mais les contemporains mirent quelque temps à le deviner. C'était un factum latin qui débutait comme suit (1) :

« Nous étant occupés, il y a quelque temps, de diverses questions touchant la cycloïde et son centre de gravité, plusieurs problèmes dont la solution nous semble devoir exiger quelques efforts vinrent se présenter à notre esprit. Nous demandons instamment cette solution à tous les géomètres de l'Univers, et nous offrons un prix à ceux qui l'auront trouvée, non point pour rémunérer leurs efforts (loin de nous cette pensée !) mais pour leur témoigner notre déférence et rendre publiquement hommage à leur mérite. »

Une somme de 60 pistoles fut consignée entre les mains de Carcavi, qu'on chargea en même temps de faire examiner les solutions par des juges compétents et, le cas échéant, de décerner les prix, l'un de 40, l'autre de 20 pistoles.

Les problèmes proposés étaient au nombre de six :

1° Quadrature d'un segment de cycloïde compris entre la courbe, l'axe, et une corde parallèle à la base.

2° Détermination du centre de gravité de ce segment.

3° Calcul du volume engendré par la rotation du segment autour de sa corde.

4° Même question pour le volume engendré autour de l'axe.

5° Détermination des centres de gravité de ces volumes.

6° Même question pour la moitié des dits volumes supposés coupés par un plan mené suivant l'axe.

Les quatre premières questions avaient déjà été antérieurement résolues par Roberval. Pascal l'ignorait et on ne pouvait le lui reprocher, car, suivant son habitude, Roberval avait tenu la chose secrète. Son silence, maladroit cette fois encore comme déjà en d'autres circonstances, ne l'empêcha pas de protester. Il était coutumier du fait. Pascal lié d'amitié avec le grincheux professeur et désireux de ne pas

la Demonstration à la maniere des Anciens de l'Egalité des Lignes Spirale et Parabolique.

Il est daté de « Paris ce 10 Décembre 1658 » et il a été reproduit dans *Pascal* (t. VIII, pp. 247-282).

On ignore quel est le personnage désigné sous les initiales A.D.D.S.

(1) *Pascal*, t. VII, p. 343.

se brouiller avec lui accepta ses réclamations de priorité ; mais, au lieu de reconnaître franchement sa méprise, le rédacteur du factum chercha à remettre les choses au point en parlant et en écrivant désormais, comme si tous les prétendants aux prix avaient dû savoir ou deviner, que ces prix ne concernaient en réalité que les deux derniers problèmes. Attitude équivoque, qui fut la cause initiale, du moins apparente, des démêlés qu'il eut avec Wallis et Lalouvère.

Il y en avait une autre plus profonde. Au fond, dans ce concours, jamais Pascal n'avait sérieusement eu en vue le progrès de la science. Il projetait un grand ouvrage contre l'athéisme. Le duc de Roannez, son ami, lui persuada qu'il était de bonne guerre de se donner au préalable de l'autorité sur ses adversaires. Puisqu'il venait de résoudre quelques problèmes vraiment très difficiles, relatifs à la cycloïde, pourquoi ne pas les proposer en défi aux mathématiciens ? Si aucun d'eux n'en venait à bout, comme c'était probable, il aurait tout l'honneur de la solution. Pascal accepta (1).

Voilà la clef de toutes les chicanes qui troublèrent la sérénité de l'examen des mémoires envoyés au concours. On désirait ne pas devoir décerner les prix.

Mais le but poursuivi par le géomètre de Port-Royal nous dévoile aussi la raison de la différence si curieuse que l'on constate entre l'aisance du *Traité du Triangle arithmétique*, et la complication du plan des traités relatifs à la cycloïde. Cette complication est voulue, car Pascal est avant tout dominé par l'idée de prouver au lecteur qu'il fait œuvre très difficile. Faut-il dire qu'il y met un art infini et qu'il y réussit ?

Mon dessein n'est pas de raconter une fois de plus les querelles de Pascal avec Wallis et Lalouvère. Joseph Bertrand (2) et Paul Tannery (3) l'ont fait dans des récits im-

(1) Voir sur ce sujet, le *Mémoire* sur Pascal publié par sa nièce Marguerite Périer, reproduit dans *Pascal*, t. I, pp. 123-136.

(2) *Blaise Pascal*, pp. 317-337.

(3) *Pascal et Lalouvère*, par Paul Tannery. MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES DE BORDEAUX, 3e sér., t. V, Paris, Gauthier-Villars, 1890, pp. 55-84 ; et 4e sér., t. IV, 1894, pp. 251-259.

partiaux auxquels il n'y a rien d'essentiel à ajouter. Mais Christiaan Huygens va jouer un rôle si important dans ce chapitre de mon travail, qu'il faut connaître l'impression qu'il ressentit à la lecture des problèmes mis au concours.

Le grand Hollandais avait reçu un exemplaire de la plaquette anonyme par l'entremise d'Ismaël Boulliau. Très intéressé, il se mit incontinent à l'œuvre, résolut sans trop de peine les premiers numéros du concours et envoya les solutions à Paris ; mais devant la difficulté des suivants un doute le prit. Les énoncés lui parurent formulés d'une manière peu nette. S'agissait-il notamment de la seule cycloïde ordinaire ou bien fallait-il étendre les problèmes aux cycloïdes raccourcies ou allongées. « Vous m'obligerez, écrit-il à Boulliau (1) en me donnant quelque esclaircissement touchant cecy et s'il se peut aussi touchant le nom de cet incognu. Mais sur tout si vous me pouuez assurer de sa part que ce qu'il nous propose est chose qui soit desià trouuée,ou du moins trouuable.Car alors, si je n'en puis venir à bout, j'auray au moins cett' esperance d'en deuoir estre instruit quelque jour par les escrits qu'il nous promet. »

La lettre était du 29 juin et resta près de deux mois sans réponse. La date extrême assignée pour le dépôt des mémoires entre les mains de Carcavi était celle du 1er octobre. Huygens s'inquiétait et le 19 septembre il écrivait de nouveau à Boulliau (2) :

« Monsieur,

» J'attens encore vostre responce a ma derniere lettre par la quelle je vous priay de me faire scavoir le nom de l'autheur des problemes de la Cycloide, ou qu'il me voulust au moins assurer que tous les dits problemes estoyent possibles. Il ne s'en faut guere que je ne croye le contraire, a cause de vostre silence ; et partant je n'ay pas voulu m'y attacher d'avantage, auparavant que d'avoir este premierement tiré de ce doubte. »

(1) *Œuvres complètes de Christiaan Huygens*, publiées par la Société hollandaise des Sciences, t. II, La Haye, Nijhoff, 1889, p. 201.
(2) *Ibid.*, p. 220.

Stimulé par cette instance, Boulliau répond (1) :

« Monsieur,

» Je vous supplie de m'excuser si je n'ay fait aucune response a vostre precedente lettre, les affaires que j'ay eües et l'absence de Monsieur Carcaui sont cause que je n'ay pu le faire, ny auoir aucun esclaircissement de luy, soit pour le nom de l'autheur qui ne veut point estre cognu, comme ledit Seigneur Carcaui m'a cy deuant dit, soit pour l'estat de tous les problemes. Je scauray a son retour de la campagne, ce qu'il pourra ou voudra m'en dire ».

Boulliau écrivait ces lignes peu encourageantes le 27 septembre. La date fatale du 1er octobre était imminente. Huygens prit le parti d'attendre. Quand il reçut la lettre imprimée de Dettonville à Carcavi qui résolvait les problèmes, il ne cacha pas son admiration, mais sans se dissimuler toutefois le défaut de composition de l'ouvrage (2).

« J'admire de plus en plus la subtilité des escrits de M. Dettonville, écrit-il à Carcavi, mais il faut avouer que c'est un labyrinthe lors que l'on veut faire la construction de quelque probleme ; et pour cela, je voudrois qu'il eust partout pris seulement un cas le plus facile pour en donner le calcul tout du long et non seulement le dernier *facit*, ou bien un exemple a chaque Theoreme. »

Rien de plus juste, mais Pascal voulait ce labyrinthe. Son artifice consiste précisément à éviter de pousser tout uniment jusqu'au bout le calcul d'un problème, comme Huygens le souhaitait avec tant de raison. Six petits mémoires sont annexés à la lettre de Dettonville à Carcavi : 1° Le traité des triligres rectangles et de leurs onglets. 2° Les propriétés des sommes simples, triangulaires et pyramidales. 3° Le traité des sinus du quart de cercle. 4° Celui des arcs de cercle. 5° Le petit traité des solides circulaires. Enfin 6°, le traité général de la roulette.

Aucun des cinq premiers ne donne à proprement parler un exposé complet du sujet annoncé dans le titre, mais bien plutôt un choix de questions habilement enchaînées qui

(1) *Ibid.*, p. 226.
(2) *Ibid.*, p. 411.

tiennent l'attention en suspens, et empêchent d'apercevoir comment tous ces lemmes, tous ces théorèmes rapprochent du but à atteindre. Puis, quand le lecteur a été longtemps égaré dans ce labyrinthe, d'ailleurs toujours intéressant, Pascal, par un dernier *facit*, comme dit Huygens, lui montre en peu de pages, qu'il a entre les mains tous les « éléments » nécessaires à la solution des six problèmes. On pourrait ajouter que Dettonville ne lui a fourni que cela. Tous les préliminaires s'enchaînent et doivent être utilisés. On n'en peut rien supprimer. C'est merveilleux de complication élégante ; mais l'auteur a dépassé le but. Jamais, à aucune époque, beaucoup de géomètres n'ont étudié les traités de la roulette. Parmi nos plus chauds admirateurs de Pascal, on compterait sur les doigts ceux qui ont eu la patience de les lire jusqu'au bout. D'ailleurs, pour les comprendre, il faut, la plume à la main, les traduire en notations algébriques modernes. Maximilien Marie, dans son *Histoire des Sciences mathématiques et physiques* (1), a esquissé un travail de ce genre, qui peut être utile au lecteur, à la condition expresse d'avoir le texte des traités sous les yeux (2). Pascal appar-

(1) T. IV, Paris, Gauthier-Villars, 1884, pp. 189-230. Je saisis cette occasion pour dire que l'*Essai sur les travaux de Pascal touchant l'analyse infinitésimale*, par Delègue, publié dans les MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ DUNKERQUOISE POUR L'ENCOURAGEMENT DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES ARTS (t. XIV, Dunkerque, Kien, 1869 ; pp. 137-162) doit être consulté avec prudence. L'auteur connaît mal l'histoire des mathématiques.

(2) Les notations de Marie ont le défaut grave de faire croire que Pascal a trouvé des formules générales d'intégrales *indéfinies*, tandis qu'il n'a donné que des formules particulières d'intégrales *définies*, c'est-à-dire des quadratures et des cubatures découvertes par des artifices géométriques. Ainsi dans le *Traité des Trilignes rectangles*, Pascal énonce la proposition suivante (*Pascal*, t. IX, p. 7) : « La somme des quarrez des ordonnées à la base est double des rectangles compris de chaque ordonnée à l'axe et de sa distance de la base » ; qui se traduit très exactement par

$$\int_0^a y^2 dx = 2\int_0 xydy. \qquad \text{(I)}$$

Marie dit (t. IV, p. 206) : « Cette proposition équivaut absolument à celle que traduirait notre formule

$$\int y^2 dx = xy^2 - 2\int xydy. \qquad \text{(II)}$$

Il est clair qu'un géomètre du XXe siècle déduirait sans peine la

tient tout entier à l'école exclusivement géométrique d'Archimède et dédaigne l'algorithme algébrique. Pour lui, ni Viète, ni Descartes ne semblent avoir existé. C'est dire que, dans ses démonstrations infinitésimales, il remplace nos calculs par des artifices géométriques, d'ailleurs souvent très ingénieux. Il en résulte encore que l'analyse de Pascal a en réalité un caractère assez différent de ce qu'on pourrait croire à la simple lecture de Marie. D'autre part, la méthode de Pascal le conduit parfois à des résultats inattendus. J'en trouve un exemple dans la Lettre de Dettonville à Carcavi et le Traité des trilignes. En s'appuyant sur des considérations exclusivement géométriques, le Clermontois y établit des formules d'un degré supérieur au troisième.

Le fait en soi n'était pas nouveau, et Cavalieri en avait fourni des modèles. Mais, le langage tenu par Pascal en la circonstance est une nouveauté, car il parle de l'espace à quatre dimensions avec l'assurance et la correction d'un géomètre du vingtième siècle. J'ai traité en une note détaillée cette question dans les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE (1), ce qui me permet de ne pas insister.

Revenons à un sujet déjà touché dans le chapitre précédent : l'idée que Pascal se fait, en 1658, de la nature des indivisibles. Lorsque, quatre ans auparavant, il rédigeait le *Triangle arithmétique*, son concept des indivisibles, nous l'avons vu, restait confus. Depuis, il avait évolué et s'était précisé. C'est que le philosophe-géomètre avait lu les *Quatre livres des Cylindres et des Anneaux* d'André Tacquet ; il nous le dit lui-même (2). Tacquet, jésuite anversois, avait eu pour maître, à Louvain, Guillaume Boelmans, qui était l'un des plus brillants élèves de Grégoire de Saint-Vincent. Or, dans l'admirable Livre VII du *Problema Austriacum* (3)

formule (I) de la formule (II). Mais cette dernière est bien plus générale et rien ne peut faire croire que Pascal ait soupçonné la nécessité d'y introduire le terme en xy^2.

(1) T. XLII, 1923, 1e part., pp. 337-345. *Sur l'interprétation géométrique donnée par Pascal à l'espace à quatre dimensions.*

(2) Voir *Pascal*, t. VIII, p. 377.

(3) *Problema Austriacum Plus ultra Quadratura circuli* Auctore P. Gregorio a Sto Vincentio Soc. Iesu. Antverpiae, Apud Ioannem et Iacobum Meursios. Anno M. DC. XLVII, pp. 703-864.

de Grégoire, l'auteur se sert des indivisibles, non pas à la manière de Cavalieri, comme vrai moyen de démonstration, mais comme simple instrument de recherche. Après coup, il donne aux raisonnements une forme rigoureuse. Tacquet s'inspire du même principe, et voici notamment ce que Pascal pouvait lire dans le scolie de la proposition XII du premier livre *des Cylindres et des anneaux* (1). Le jésuite y donne aux indivisibles le nom d'*hétérogènes* ; les *homogènes* sont, par opposition, les démonstrations géométriques imitées des anciens.

« Si on proposait un théorème, dit-il, qui ne pourrait se démontrer que par les indivisibles, on devrait douter de sa vérité jusqu'à ce qu'il apparaisse qu'ils sont réductibles aux homogènes. Or ceci n'est autre chose que revenir à la méthode des anciens, en épuisant les quantités proposées par l'inscription d'homogènes. »

Pascal ne perd pas la leçon et nous dit à son tour (2) :

« Tout ce qui est demonstré par les ve itables regles des indivisibles se demontrera aussi à la rigueur et à la maniere des anciens et... l'une de ces methodes ne differe de l'autre qu'en la maniere de parler. »

Dans un article consacré spécialement à ce sujet (3), j'ai transcrit au long le scolie de Tacquet et le passage de Pascal dont je viens de donner un extrait. Il me paraît superflu de les reproduire une fois de plus ; à l'exception toutefois de quelques lignes de la lettre de Dettonville. Il s'y agit d'un demi-cercle. L'auteur vient de dire que pour en évaluer l'aire par les indivisibles, il faut supposer que chacun d'eux — c'est-à-dire, chaque ordonnée — est multiplié par une partie infinitésimale du diamètre auquel ces ordonnées sont perpendiculaires, ce qui forme de petits rectangles inscrits. Puis, il ajoute :

(1) P. 23-24.
(2) *Pascal*, t. VIII, pp. 352-353.
(3) *La notion des indivisibles chez Blaise Pascal*. ARCHIVIO DI STORIA DELLA SCIENZA, t. IV, Roma, Casa editrice Leonardo da Vinci, 1923 ; pp. 369-379.

« Je ne feray aucune difficulté d'user de cette expression, *la somme des ordonnées*, qui semble n'estre pas geometrique à ceux qui n'entendent pas la doctrine des indivisibles, et qui s'imaginent que c'est pecher contre la geometrie que d'exprimer un plan par un nombre indefiny de lignes, ce qui ne vient que de leur manque d'intelligence, puis qu'on n'entend autre chose par là, sinon la somme d'un nombre indefiny de rectangles faits de chaque ordonnée avec chacune des petites portions égales du diametre, dont la somme est certainement un plan, qui ne differe de l'espace du demy cercle que d'une *quantité moindre qu'aucune donnée* ».

On le voit, les indivisibles ne sont plus des points qui n'ajoutent rien à une ligne ; ni des lignes qui n'ajoutent rien à une surface ; ni des surfaces qui n'ajoutent rien à un corps. Désormais Pascal voit clair ; les indivisibles sont nos quantités qui tendent vers zéro ; il les maniera dans ses travaux sur la cycloïde, avec autant de précision et de clarté que nous le ferions de nos jours.

Une question se présente naturellement ici. Quelle influence les traités de la cycloïde eurent-ils sur les progrès de l'analyse infinitésimale ? On a assez peu lu ces petits mémoires, je viens de le dire. Je répondrais donc que cette influence fut faible, n'était Leibnitz. Mais il est très important d'observer de quelle manière la lecture de Pascal a agi sur la pensée de l'illustre géomètre.

Au début du *Traité des sinus du quart de cercle* se trouve un lemme, dont je donne en note l'énoncé en langage moderne et de plus un aperçu de la démonstration (1). Il est devenu classique dans tous nos cours de géométrie élémentaires, où il sert de point de départ pour la mesure de la zone et de la surface de la sphère. La méthode d'Archimède diffère, on le sait, de la nôtre.

(1) Soit t une tangente infinitésimale, a l'arc infinitésimal qui lui correspond, p leur projection commune sur le rayon perpendiculaire aux sinus, s le sinus du point de contact, r, le rayon du cercle. Pascal prouve par des triangles semblables, que

$$p \cdot r = s \cdot t ;$$

puis, en remplaçant la tangente infinitésimale par l'arc, au moyen d'un raisonnement équivalent à un passage à la limite, que

$$p \cdot r = s \cdot a.$$

Au cours de la démonstration, Pascal, par un raisonnement équivalent à un passage à la limite, remplace des tangentes infinitésimales par des arcs qui leur correspondent, ce qui l'amène à dessiner de petits triangles rectangles infinitésimaux à hypoténuse curviligne, que Leibnitz appellera un jour triangles caractéristiques. Nous les nommons triangles différentiels. Cette notion n'était pas précisément neuve et devait même venir assez naturellement à l'esprit de tout géomètre qui avait étudié Archimède. M. Aubry (1) remarque fort bien, qu'on la trouve, déjà très nettement, dès 1624, dans les propositions 17 et 18 du premier livre du *Tiphys Batavus* de Willebrord Snellius (2).

Quoi qu'il en soit, ce fut dans le *Traité des sinus du quart de cercle*, que le géomètre de Hanovre remarqua le triangle différentiel. On était en 1673. Leibnitz séjournait alors à Paris, où il fréquentait Christiaan Huygens. Ce dernier passait déjà pour un maître ; mais Leibnitz s'était mis fort tard aux mathématiques et ne faisait qu'y débuter. Il a plus d'une fois pris plaisir à raconter à ses amis, les premiers faux pas qu'il fit dans l'étude de cette science ; et il les leur avoue avec une naïveté et une franchise presque déconcertantes. Écoutons, par exemple, ce qu'il en écrit à Tschirnhaus (3).

« La première fois, dit-il, que je découvris ma méthode du triangle *caractéristique* et d'autres choses analogues, ce fut à une époque où je m'occupais à peine depuis quelques mois d'études géométriques. Huygens venait de publier son livre sur le pendule (4) et m'en avait

(1) *Sur l'histoire du calcul infinitésimal entre les années* 1620 *et* 1660, ANNAES DA ACADEMIA POLYTECHNICA DO PORTO, Coimbra. Imprensa da Universidade, 1911, pp. 83-84.

(2) *Willebrordi Snelli a Royen Tiphys Batavus, sive Histodromia, De navium cursibus, et re navali.* Lugduni Batavorum, Ex officina Elzeviriana, Anno M. DC. XXIV, pp. 22-25 (Bibl. Roy. de Belgique).

(3) Publié en appendice, par Gerhardt, dans son article *Leibniz und Pascal.* SITZUNGSBERICHTE DER KÖNIGLICH-PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN, 1891, t. II, Berlin, Georg Reimer, pp. 1061-1063.

(4) Huygens a publié deux ouvrages sur l'application du pendule aux horloges. Le premier n'était qu'une petite brochure intitulée :

donné un exemplaire. J'ignorais alors complètement l'algèbre de Descartes et la méthode des indivisibles ; j'ignorais même la vraie définition du centre de gravité. Un jour, que, d'aventure, je causais avec Huygens, je m'imaginais, et je le lui dis, qu'une droite menée par le centre de gravité divisait toujours la figure en deux parties égales ; car cela est clair pour le carré, le cercle, l'ellipse et toutes les figures qui ont un centre de grandeur (un centre de symétrie). Je croyais qu'il en était de même pour toutes les autres.

» Huygens riait en m'entendant et me disait qu'il n'y avait rien de plus faux.

» J'en fus stimulé comme par un aiguillon, et je me mis à étudier la géométrie de l'intérieur des surfaces (geometriam interiorem), car, à vrai dire, je n'avais même jamais lu les *Éléments* (1). Mais l'expérience m'apprit qu'on pouvait se passer de la connaissance des *Éléments*, à condition d'en posséder un petit nombre de propositions. — Huygens qui me croyait meilleur géomètre que je n'étais me donna à lire les lettres publiées par Pascal sous le pseudonyme de Dettonville (2). J'y appris la méthode des indivisibles et des centres de gravité, j'entends la méthode vulgaire de Cavalieri et de Guldin. Tandis que je lisais Pascal, je couchais aussitôt sur le papier toutes les idées que cette lecture me suggérait. Je reconnais aujourd'hui que quelques-unes étaient ineptes (ex quibus nunc video nonnullas esse ineptas) ; mais d'autres continuent à me plaire beaucoup, même maintenant ».

Christiani Hugenii à Zulichem, Const. F. Horologium. Hagae Comitum. Ex officina Adriani Vlacq M. DC. LVIII.

Mais il s'agit ici du chef-d'œuvre de Huygens qui venait de paraître sous le titre de : *Christiani Hugenii Horologium Oscillatorium Sive de Motu Pendulorum Ad Horologia Aptato Demonstrationes Geometricae.* Parisiis, Apud F. Muguet... MDCLXXIII.

(1) Les *Éléments* d'Euclide.

(2) Outre la Lettre à Carcavi, dont j'ai donné le titre ci-dessus, il y en a encore deux autres :

Lettre de A. Dettonville à Monsievr de Slvze, Chanoine de la Cathedrale du Liege, en lvy envoyant La Dimension et le Centre de Grauité de l'Escalier. La Dimension et le Centre de Grauité des Triangles Cylindriques. La Dimension d'vn Solide formé par le moyen d'vne Spirale autour d'vn Cone. A Paris, M. DC. LVIII. (Reproduit en fac-simile dans *Pascal*, t. IX, p. 136).

Lettre de A. Dettonville a Monsievr Hvggvens de Zvlichem, en lvy envoyant la Dimension des Lignes de toutes sortes de Roulettes, lesquelles il monstre estre égales à des Lignes Eliptiques. A Paris, M. DC. LIX. (Reproduit en fac-simile dans *Pascal*, t. IX, p. 188.)

Pour tout ce qui est relatif à Sluse, voir les travaux de M. Le Paige et notamment : *Un géomètre belge du XVIIe siècle : René*

Leibnitz en donne ici des exemples étrangers à notre sujet, puis il continue :

« Je lus alors pour la première fois avec attention Descartes (1) et Schooten (2). Ce fut sur le conseil de Huygens, qui me dit que leur mode de calcul était le plus commode. Entre temps la voie si aisée que le triangle caractéristique m'avait ouverte, me fit trouver d'innombrables théorèmes, dont je remplis beaucoup de feuilles de papier. Je m'aperçus, cependant, après coup, que la plupart d'entre eux étaient connus de van Heuraet, de Grégory et de Barrow.

» Tout cela, je le fis dès la première année de mon apprentissage en géométrie (primo tirocinii mei geometrici anno). Plus tard je me suis attaché à des matières beaucoup plus importantes. Ni Grégory, ni Barrow n'en seraient venus à bout par leurs méthodes ; à plus forte raison ni Cavalieri, ni Fermat.

» Vers la même époque je remarquai que le problème des quadratures se réduisait à celui des sommations de séries et qu'inverse-

François de Sluse, CIEL ET TERRE, t. VII, Bruxelles, Institut national de Géographie, 1886-1887, pp. 537-545 et 570-579. Cet article a été réédité, sans les notes, dans la *Biographie nationale publiée par l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*, t. XXII, Bruxelles, Bruylant, 1914-1920, col. 716-732.

(1) Plusieurs éditions de la *Géométrie* de Descartes avaient déjà paru, dont la première était de 1637.

(2) En 1673 tous les ouvrages de François Van Schooten avaient paru. Il est difficile de dire avec certitude auquel d'entre eux Leibnitz fit allusion. Mais il est probable qu'il s'agit de la vraie encyclopédie de tous les travaux relatifs à la géométrie de Descartes que Schooten donna, en 1659, sous le titre de :

Renati Des-Cartes Geometria. Editio secunda Multis accessionibus exornata et plus altera sui parte adaucta.

Geometria a Renato Des Cartes Anno 1637 *Gallice edita ; postea autem una cum Notis Florimondi De Beaune... Gallice conscriptis in Latinam linguam versa et commentariis illustrata Opera atque studio Francisci a Schooten... Nunc autem ab eodem diligenter recognita locupletioribus commentariis instructa, multisque egregiis accessionibus, tam ad uberiorem explicationem, quam ad ampliandam hujus Geometriae excellentiam facientibus, exornata...* Amstelodami, Apud Ludovicum et Danielem Elzevirios. M. DC. LIX. (Bibl. Royale de Belgique).

Ces « egregiae accessiones » se composent non seulement des mémoires dus à Schooten et à Florimond De Beaune qui sont nommés dans le titre, mais d'autres encore qui ont pour auteurs Hudde, Jean De Witt, van Heuraet et Bartholin.

ment le problème des tangentes se réduisait à celui des différences, fondement de mon nouveau calcul. Je l'appelle *différentiel*, ou *tétragonistique*... Je remarquai aussi, d'une manière générale, que trouver la somme d'une série ne consistait qu'en ceci : *trouver une nouvelle série dont les différentielles constituassent la série donnée.* J'appelle d'ordinaire cette nouvelle série la *sommatrice.* »

La postérité lui a préféré le nom d'Intégrale indéfinie. Voilà l'immortelle découverte de Leibnitz, dont il partage la gloire avec Newton.

Comprend-on maintenant qu'il faut préciser davantage la question, quand on se demande si le Triangle différentiel de Pascal a eu de l'influence sur l'Inventeur du calcul différentiel ?

Au surplus, qu'on le remarque bien : la lettre dont je viens de traduire un long extrait date de 1679. Elle est donc très rapprochée des événements qu'elle raconte et précède de près de trois ans l'apparition du premier volume des *Acta eruditorum*, qui est de 1682 (1). Leibnitz n'avait encore fait part au public d'aucune des grandes découvertes qu'il lui communiqua plus tard par la voie de ce recueil. La date de la lettre ne suffit, cependant, pas pour expliquer la singulière franchise des aveux qu'elle contient. Leibnitz n'était encore qu'un débutant. C'est vrai. Mais, plus tard, couvert de gloire, jamais il ne rétracta sa confession. C'est en termes analogues qu'il s'exprima de nouveau, en 1694, dans une lettre au marquis de l'Hospital (2). Enfin, au déclin de sa carrière, pendant la dernière année de sa vie et au plus fort de sa querelle avec Newton, il écrit en substance la même chose dans son Histoire des Origines du calcul différentiel (3).

En résumé, c'est bien à la lecture de Pascal que Leibnitz conçut la première idée du calcul différentiel. Mais, faut-il

(1) ACTA ERUDITORUM ANNO MDCLXXXII PUBLICATA... Lipsiae, Prostant apud J. Grossium et J. F. Gletischium. Typis Christophori Güntheri.

(2) Publié par Gerhardt en appendice de son article *Leibniz und Pascal*, pp. 1064-1065.

(3) Un fragment en a été publié en appendice du même article, p. 1065.

en conclure que Pascal l'entrevit de son côté ? Qu'il convient, par conséquent, de le tenir pour le premier inventeur de ce calcul, à l'instar de ce que Lagrange et Laplace ont dit de Fermat ?

Je crois qu'on doit répondre « non » sans hésiter.

« Les tangentes, dit Chasles (1), forment l'élément dont la connaissance est le plus indispensable dans la théorie des courbes, et celui qui devait conduire au calcul infinitésimal.»

Jamais Pascal ne paraît s'être intéressé au problème des tangentes. Par indifférence ou par tournure d'esprit trop exclusivement géométrique — je ne me prononce pas — jamais non plus il ne semble avoir sérieusement étudié l'algèbre de Viète, ni celle de Descartes. Comment dès lors eût-il pu apprécier l'importance que prendrait un jour le problème tout algébrique des tangentes ?

État d'esprit singulier chez un si grand géomètre !

On vient d'entendre en quelle estime Leibnitz tenait les traités de la cycloïde. Et cependant, faisant un jour à Jacques Bernoulli une allusion à quelques conséquences découlant naturellement des principes posés par Dettonville dans ses traités et que celui-ci n'avait pas aperçues, ce même Leibnitz écrivait à son correspondant, que Pascal lui paraissait avoir, par moments, « un bandeau sur les yeux » (2).

V

Conclusion

En parlant de Pascal, je me suis efforcé d'oublier l'homme, le plus possible, pour ne me laisser guider que par son œuvre mathématique.

Elle est brillante, car elle est d'un écrivain. Elle est aussi

(1) *Traité de Géométrie supérieure*, p. LIX.

(2) Publié par Gerhardt dans son article, *Leibniz in London*, SITZUNGSB. DER KÖN. PREUSS. AKAD. DER WISS. ZU BERLIN, 1891, t. I, pp. 159, 160. La lettre a été écrite en 1703. « Sed nihil magis obstupui, dit Leibnitz, quam quod Pascalius, fato quodam velatos oculos habuisse videretur. »

d'un géomètre ; mais celui-ci, comme tel, est loin d'éclipser ses contemporains. Encore une fois, pareil éloge serait une exagération. Si on s'est plu à le répéter, du moins est-ce en dehors du cercle des historiens des mathématiques.

Et d'abord, on ne voit pas en quoi Pascal-géomètre éclipse, par exemple, Fermat ; bien au contraire. Non seulement ce dernier l'égale en tout, mais il eut une plus grande influence que lui sur les progrès de l'analyse infinitésimale. De plus, s'il créa avec Pascal le calcul des probabilités, il créa, en outre, avec Descartes, la géométrie analytique, que Pascal ignora toujours.

En géométrie pure, Desargues l'emporte nettement sur Pascal par son esprit d'invention, ou, si l'on préfère, par son esprit de finesse ; mais Desargues est obscur. Pascal a popularisé quelques théorèmes du Lyonnais, en les formulant clairement, notamment celui de l'Involution ; mais, il y ajouta son propre théorème de l'hexagramme mystique, qui lui fait grand honneur.

Il n'y a pas lieu d'établir un parallèle entre Descartes et Pascal, dont les méthodes diffèrent trop. Le premier est algébriste ; le second — et je l'ai dit à satiété — ignora, ou du moins, dédaigna toujours l'algèbre. La conséquence devait en être fatale, et le fut. Descartes a laissé sur l'analyse une trace ineffaçable ; celle de Pascal est nulle ou à peu près.

Dans le calcul infinitésimal, Cavalieri imagine les artifices géométriques avec une virtuosité étourdissante ; mais il écrit en logogriphes et fait peu de cas de la rigueur. Sans l'égaler, Pascal possède quelque chose de son ingéniosité. Dans son *Traité de la sommation des puissances semblables*, il a encore les idées confuses du Bolonais sur la nature des indivisibles. En revanche, plus tard, dans ses travaux sur la cycloïde il les mania avec la correction qu'y mettent Tacquet et Grégoire de Saint-Vincent. Ajoutons que dans ses mémoires sur la cycloïde il prend pour point de départ de son analyse infinitésimale tout entière, la balance d'Archimède à laquelle il applique la théorie des nombres figurés. C'est original, mais peu naturel pour démontrer les théorèmes de géométrie pure ; aussi sa méthode n'a-t-elle guère eu d'imitateurs.

Restent la théorie des nombres et le calcul des proba-

bilités. Ce sont les plus beaux titres de gloire du mathématicien Pascal ; aussi les ai-je réservés pour mettre fin à ce coup d'œil d'ensemble. Pascal s'y montre un maître et n'y mérite que des éloges. Son petit *Traité du Triangle arithmétique* proprement dit est un chef-d'œuvre d'ordre et de clarté. Peut-être est-ce même ce qu'il nous a laissé de plus achevé en mathématiques. Nous n'avons pas l'équivalent pour le calcul des probabilités, car les travaux de Pascal écrits directement en vue de ce calcul sont perdus. Mais dans la Préface de son *De ratiociniis in ludo aleae* (1),

(1) *Œuvres complètes de Christiaan Huygens*, t. XIV, La Haye, 1920, pp. 56-58.

Voici, traduites textuellement, les expressions de Huygens :

« Il faut savoir d'ailleurs qu'il y a déjà un certain temps que quelques-uns des plus célèbres Mathématiciens de toute la France se sont occupés de ce genre de calcul, afin que personne ne m'attribue l'honneur de la première invention qui ne m'appartient pas. »

Ces célèbres mathématiciens français sont, avant tout, Pascal et Fermat. Mais, leurs écrits s'étant perdus, il est difficile de préciser la part qui revient à chacun d'eux dans le travail du modeste Hollandais, et encore plus celle qu'on doit, malgré sa loyale déclaration, assigner à Huygens lui-même. Elle est très grande.

Car, il ne faudrait évidemment pas outrer le sens des paroles de Huygens. Voici comment il les précise (*O. c.*, t. XIV, p. 58) :

« Ces savants (Pascal et Fermat), quoiqu'ils se missent à l'épreuve l'un l'autre en se proposant beaucoup de questions difficiles à résoudre, ont cependant caché leurs méthodes. J'ai donc dû examiner et approfondir moi-même toute cette matière à commencer par les éléments et il m'est impossible, pour la raison que je viens de mentionner, d'affirmer que nous sommes partis d'un même premier principe. »

Le mémoire de Huygens fut publié par son professeur, François van Schooten, en appendice d'un de ses propres ouvrages qui parut à trois ans de distance en latin et en hollandais.

Titre de départ : *Francisci à Schooten Exercitationvm Mathematicarum Libri quinque*... sans lieu, ni date, ni nom d'imprimeur.

Titre spécial du livre V : *Francisci à Schooten Leydensis In Academia Lugduno-Batava Matheseos Professoris Exercitationvm Mathematicarum Liber V. Continens Sectiones triginta miscellaneas*. Lvgd. Batav. Ex Officina Johannis Elsevirii, Academiae Typographi. M. DC. LVII.

La disposition des titres de l'édition hollandaise est analogue :

Huygens, probablement mieux documenté que nous, fait profession de devoir à Pascal et à Fermat presque tout ce que cet ouvrage immortel contient de bon.

Titre de départ : *Francisci van Schooten Mathematische Oeffeningen*...

Titre du livre V : *Vijfde Bouck der Mathematische Oeffeningen Begrijpende Dertich Afdeelingen van gemengde stoffe*. Door Franciscvs van Schooten, Professor Matheseos in de Vniversiteyt tot Leyden. 't Amsterdam, By Gerrit van Goedesbergh... Anno 1660. Cette édition doit être regardée comme l'édition originale de Huygens qui écrivit son Mémoire en Hollandais. Van Schooten se chargea de la traduction latine.

Jacques Bernoulli a fait du mémoire de Huygens la première partie de son *Ars conjectandi*... Basileae, Impensis Thurnisiorum, Fratrum. M. DCC. XIII, pp. 1-71.

On voit en quel sens on peut dire avec vérité que Pascal et Fermat créèrent le calcul des Probabilités. Sans leurs travaux, aujourd'hui perdus, les ouvrages fondamentaux d'Huygens et de Bernoulli n'eussent probablement jamais existé.

H. Bosmans.