Mathesis 40 (8), 1926

SOMMAIRE.

	Pages
La trigonométrie d'ALBERT GIRARD, (La Haye, 1626), par M. H. BOSMANS, S.-J.	337
Sur l'isopôle d'une droite, par M. CL. SERVAIS	349
Sur une transformation quadratique involutive, par M. L. GODEAUX	352
Note de Géométrie descriptive, par AD. M.	360
Bibliographie	364
Notes mathématiques	370
Solutions de questions proposées (2314, 2322, 2364, 2366, 2367)	375
Questions d'examen	382
Questions proposées	384
Suppléments.	

Chaque abonné doit procurer un nouvel abonné à « Mathesis ».

LA TRIGONOMÉTRIE D'ALBERT GIRARD, (La Haye, 1626),

par M. H. BOSMANS, S.-J.

ALBERT GIRARD nous a laissé deux travaux sur la trigonométrie. En 1626, il a joint à sa *Table des sinus* un précis de trigonométrie rectiligne et sphérique, fort court, mais peu banal. En 1629, la dernière partie de son *Invention nouvelle en l'Algebre* traite « De la nature de la superficie des triangles et polygones sphériques nouvellement inventée par ALBERT GIRARD ». GIRARD ne fait guère d'allusion aux surfaces sphériques, dans sa trigonométrie de 1626, et l'importante question de leur mesure demande une étude séparée. Je n'y toucherai pas aujourd'hui, et m'en tiendrai au Précis de trigonométrie du Samielois. Comme précédemment, je lui passerai volontiers la plume.

Sa *Table des sinus* eut quatre éditions. La plus ancienne, la plus importante au point de vue des droits de priorité de l'auteur, bien que sous d'autres rapports ce ne soit pas la meilleure, parut en 1626 sous le titre de : *Table des sinvs, tangentes et secantes, selon le raid de* 100000 *parties. Avec un traicté succinct tant des triangles plans, que spheriques. Où sont plusieurs operations nouvelles, non auparavant mises en lumiere, tres utiles et necessaires, non seulement aux apprentifs ; mais aussi aux plus doctes practiciens des Mathematiques. Par* ALBERT GIRARD *Samielois.* (Marque typographique des Elzevier. Le *solitaire*, avec la devise, « Non solus »). A La Haye, Chez Iacob Elzevir. L'An M.DC.XXVI. Petit in-12, de 120 feuillets en tout.

La seconde édition est de 1627. Ce n'est à proprement parler qu'un nouveau tirage de la précédente provoqué par un privilège des États Généraux des Provinces-Unies octroyé à Jacob Elzevier, à « la date du dernier avril 1627 ». Pour sauvegarder ses droits, l'éditeur en fit imprimer l' « extrait » au verso du titre ; mais seul celui-ci et le feuillet auquel il appartient ont été renouvelés. GIRARD profita cependant de la circonstance pour ajouter au premier tirage un Appendice de quatre feuillets.

Ces tirages ont l'un et l'autre des fautes typographiques assez nombreuses, presque toujours faciles cependant à corriger.

Les deux éditions suivantes passent pour meilleures. Ce sont des raretés bibliographiques que je n'ai pas vues. Elles parurent ensemble à

La Haye, en 1629, de nouveau chez Jacob Elzevier. L'une est en français, l'autre en flamand. Mes citations sont toutes faites d'après l'édition de 1626 [1].

Elle débute par un Avis « Au Lecteur benevole » qui se termine par cette exclamation : Louange à Dieu ! Je la relève parce qu'elle prouve les sentiments religieux d'un savant sur la vie intime duquel nous possédons si peu de chose.

Vient ensuite « L'explication des vocables de ceste matiere ». Parmi ces « vocables » ou définitions, j'en transcris quelques-unes.

« Adjoinct est un arc de difference entre la demi circonférence et l'arc proposé ». Les arcs adjoints sont nos arcs supplémentaires.

« Verset — en latin *sinus versus* — d'un arc est une partie du diametre entre le pied du sinus et l'arc ».

Algébriquement

$$\text{sin.vers A} = \text{R} - \cos \text{A}.$$

« Un arc est dit *mesurer* un angle, lorsque compris entre les costez, a aussi son centre au sommet d'iceluy ». Un arc qui mesure un angle, voilà une expression qui par sa concision, par ses sous-entendus, a dû choquer plus d'un lecteur habitué à écrire au long les antécédents et

---

[1] L'édition de La Haye 1627 se trouve à la Bibliothèque de l'Université de Gand et au Musée Plantin, à Anvers ; celle de 1626 à la Bibliothèque de l'Université de Gand.

Je remercie M. Bergmans, Bibliothécaire en chef de la Bibliothèque de l'Université de Gand, pour l'obligeance avec laquelle il m'a prêté les exemplaires des deux éditions que possède le dépôt dont il a la garde.

Comme toutes les impressions des Elzevier, les *Tables de sinus* de Girard intéressent les bibliographes. Voir, à ce point de vue *Les Elzevier. Histoire et Annales typographiques*, par Alphonse Willems. Bruxelles, van Trigt, ... 1880, pp. 239-240.

Willems ne semble pas avoir vu l'édition flamande de 1629. Les renseignements sur cette édition qui font défaut dans son ouvrage ont été donnés depuis dans *Supplément à l'ouvrage sur les Elzevier par* M. Alphonse Willems, par G. Bergmans, Stockholm, 1897, p. 21.

J'aurai plusieurs fois à citer Stevin. Je renvoie pour les renseignements bibliographiques qui concernent ses ouvrages, à mon article *Remarques sur l'Arithmétique de* Simon Stevin. M. L. XXXVI, pp. 167-174, 226-231, 275-281. Je citerai en abrégé par le mot *Mémoires*, les *Mémoires mathématiques*... translatés en françois par Jean Tuning... Leyde, Jean Paedts Jacobs, 1605-1608 ; par les mots *Œuvres*, les *Œuvres Mathématiques*... revues par Albert Girard, Leyde, Bonaventure et Abraham Elzevier, M DC.XXXIV.

Qu'il me soit permis de rappeler au lecteur, que ces deux ouvrages de Stevin sont très différents ; il les trouvera l'un et l'autre à la Bibliothèque Royale de Belgique.

les conséquents des rapports qui alors intervenaient encore dans les énoncés des théorèmes de mesure. Euclide continuait à régner en maître, et l'auteur des *Éléments* n'abrège jamais ses phrases par des formules conventionnelles. Le mot elliptique de *mesure* employé par Girard fera cependant fortune.

« *Corde* et *flesche* d'un arc sont choses cogneues... (mais)... faut sçavoir que *Verset* et *Flesche* different grandement ».

En faisant cette réflexion, Girard ne nomme pas ici Stevin. C'était cependant une critique directe à son adresse. Plus tard, quand notre auteur rééditera les *Œuvres* du Brugeois, il sera moins réservé. Dans ses *Mémoires Mathématiques* de 1605-1608, Stevin avait employé le mot *Flèche* dans deux sens différents, tantôt dans celui de *Flèche d'un arc proprement dite*, tantôt dans celui de *Sinus verse*. Cela prêtait à l'équivoque. En rééditant les *Mémoires*, Girard signale ce défaut par une note ajoutée au texte.

« Albert Girard. L'auteur et aussi le premier traducteur (c'était, on le sait, Jean Tuning, secrétaire du prince Henri, comte de Nassau) avoyent escrit *Flesche de sinus* et aucune fois *Flesche*, au lieu de *Versé* qu'on appelle en latin *Sinus versus*, tellement que j'ay corrigé ce nom tout partout », [1] et cela, explique-t-il sur une figure, pour éviter les confusions.

Je ne dirai rien des *Tables* elles-mêmes, si ce n'est qu'elles donnent les six lignes, calculées au rayon 10^5, de minute en minute pour tous les degrés du premier quadrant. Une même colonne lue, suivant le cas, tantôt de bas en haut, tantôt du haut vers le bas, sert à la fois, comme aujourd'hui, pour deux lignes complémentaires.

Après la Table des lignes, vient la Trigonométrie. Elle a en tête un nouveau titre :

« *Traicté succinct de la Trigonométrie. Et premièrement des Triangles rectilignes, par* Albert Girard, *Mathematicien* ».

« Les subjects de ceste matiere sont tant seulement la ligne droite et l'angle, notifiez et supputez icy par les nombres ; car ilz peuvent estre resolus par le compas, eschelle et rapporteur. Et seroit de besoing de voir prealablement la *Disme* à cause de sa facilité. Or, *l'Arithmetique de* Stevin (depuis nagueres r'imprimée) en donne suffisante information ».

Réclame peut-être intéressée, en faveur de cette *Arithmétique*, dont Girard venait, en 1625, de donner une nouvelle édition, chez les Elzevier de Leyde.

---

[1] *Œuvres*, t. II, p. 2.

L'Introduction à la Trigonométrie ne contient que quelques conseils pratiques, sans rien nous dire de la théorie élémentaire des fonctions circulaires. L'auteur la suppose connue. Au surplus, il n'écrit pas pour des débutants. C'est exceptionnellement qu'il ébauche une démonstration. Il s'adresse à des hommes de métier, bien au courant de la science, et son but est visiblement de leur fournir un aide-mémoire contenant à l'occasion des formules neuves plus pratiques que celles auxquelles ils sont habitués. De là quelques avis utiles et de bon sens. Par exemple : il ne faut pas embarrasser le lecteur en lui proposant des problèmes dont les données numériques sont incompatibles. Il en prend occasion pour blâmer VALENTIN MENNHER [1], Géomètre jadis en renom aux Pays-Bas, qui était tombé dans ce travers.

Trois *termes*, c'est-à-dire, trois conditions, suffisent pour déterminer un triangle. A ceux qui lui objectent que trois angles n'y suffisent pas, il risposte : « Je repondrai que les trois angles donnez ne valent que deux *termes*, car le troisiesme se cognoit par les deux ».

Il tombe ici dans un vice de méthode par lequel il pèche souvent : celui d'employer un mot qu'il ne définit qu'après coup. C'est ce qui lui arrive pour le mot *terme* dont il ne donne le sens que plus loin : « J'appelle *terme* tant les costez que les angles du triangle lequel en a 6 ».

La Trigonométrie rectiligne débute par trois règles.

« *I. Reigle.* Au triangle rectangle la racine quarrée de la somme des quarrez des deux costez qui font l'angle droict, est l'hypoténuse d'iceluy.

» *II. Reigle.* En tout triangle le sinus d'un angle a telle raison au costé opposite, que le sinus d'un autre angle a son costé opposite. Et au contraire, (nous dirions, et réciproquement).

---

[1] VALENTIN MENNHER naquit à Kempten en Bavière et mourut probablement en 1573. Vers le milieu du XVIe siècle, il était établi comme maître d'Arithmétique à Anvers. C'est tout ce qu'on sait de sa vie.

MENNHER a laissé de nombreux ouvrages, devenus des raretés bibliographiques, auxquelles la *Bibliotheca Belgica*, par le Bibliothécaire en chef et les conservateurs de la Bibliothèque de l'Université de Gand, a consacré une étude importante (1e sér. t. XX, Gand, Corneille Vyl, La Haye, Martinus Nijhoff, 1880-1890, Au mot MENNHER).

MENNHER mérite d'être nommé dans l'histoire de l'Arithmétique, mais il tient une place importante dans celle de la Comptabilité et de la Tenue des Livres. Je dois me borner à cette indication. Pour plus de détails, voir : VALENTIN MENNHER *und* ANTICH ROCHA. *Ein Beitrag zur Geschichte der Buchhandlung von* KARL PETER KHEIL. Prag, Bursik und Kohout, 1898.

» *III. Reigle.* Les trois costez estans cogneux, on peut cognoistre aisement les segmens du costé majeur, causez par la descente de la perpendic. sur iceluy, de l'angle qu'il soutient ».

GIRARD limite la règle au plus grand des côtés du triangle pour éviter des difficultés de signes et être certain que le pied de la hauteur ne tombera pas sur le prolongement du côté. C'est cette restriction apportée à la règle qui explique les précautions qu'il se croit parfois obligé de prendre dans son application.

Soient a, b, c, les trois côtés du triangle, et a le plus grand ; b' la projection de b sur a. L' « *Operation* » ou exemple numérique qui suit, nous apprend que b' est donné par

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b-c}{x}, \qquad b' = \frac{1}{2}(a+x),$$

d'où

$$b' = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}.$$

La trigonométrie rectiligne se résume en un problème unique :

« Les trois termes d'un triangle estans cogneux trouver les trois autres restans ».

Mais ce problème comprend quatre cas.

« *I. Cas.* Les angles et un costé cogneux ».

Appliquez la deuxième règle ou loi de la proportionnalité des sinus des angles aux côtés opposés.

« *II. cas.* Deux costez et un angle qu'ils ne comprennent ».

C'est le cas nommé aujourd'hui *Cas douteux*. GIRARD ne regarde le problème comme bien posé que si le côté opposé à l'angle connu n'est pas le plus petit. S'il est au contraire le « moindre », il faut une « détermination » supplémentaire, c'est-à-dire, qu' « il faut cognoistre l'espece de l'angle soutenu du majeur costé donné ».

La solution ne diffère pas essentiellement de celle qui est encore en usage.

« *III. Cas.* Deux costez et l'angle qu'ils comprennent cogneux ».

Trois solutions. 1° De l'extrémité du plus petit côté donné abaisser une perpendiculaire sur le plus grand, et calculer les éléments des deux triangles rectangles ainsi formés.

2° « Autre Operation pour trouver les angles incontinent.

» Comme la somme des costez donnez à leur differense, ainsi la tangente de la moitié de la somme des angles incognus, à la tangente de la moitié de la difference des mesmes ».

Algébriquement

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)}.$$

Proportion restée classique et qui marquait une date dans l'histoire de la trigonométrie. On la devait à THOMAS FINK de Flensburg, qui la donna en 1583, dans sa *Geometria rotundi* (1). FINK revendique en termes exprès l'honneur de l'avoir trouvée et on ne saurait le lui contester. La formule fit d'ailleurs sensation ; son succès fut immédiat et elle prit aussitôt place dans les principaux manuels de trigonométrie.

3° « Encore une autre operation nouvelle *de mon invention*, pour trouver incontinent le costé incogneu sans mener de perpendiculaire, n'y trouver les angles prealablement comme on a acoustumé de faire jusques à present ; et vient tres souvent en usage ».

Cette « operation » peut se traduire par

$$c^2 = (a-b)^2 + \frac{2}{R}\, ab \text{ sin. vers C}.$$

GIRARD semble, non sans raison, assez fier d'avoir inventé cette formule, qui sera encore plus pratique dans le quatrième cas que dans celui-ci. Pour apprécier les difficultés que présentaient alors les transformations des formules trigonométriques, il ne faut pas oublier qu'elles se faisaient encore presque toujours sur des figures par des constructions géométriques. Si le grand algébriste qui devait quelques années plus tard publier

(1) THOMAE FINKII *Flenspurgensis Geometria rotundi Libri XIIII ad Fredericum secundum serenissimum Daniae et Norvegiae regem* ..... Basileae, per Sebastianum Henriepetri.

Sans date au titre, mais à la dernière page : Basileae, par Sebastianum Henricpetri, anno salutis humanae M.D.LXXXIII, mense augusto ; pp. 291-295. (Bibl. Roy. de Belg.).

J'ai consacré une note historique à la formule de THOMAS FINK, dans mon édition du *Traité des Sinus de* MICHEL COIGNET, publié dans A.S.B. t. XXV, 1900-1, 2e partie. Mon mémoire y a une double pagination ; je m'en tiens à celle qui lui est propre et qui est en même temps celle des tirés à part. La note actuelle se trouve pp. 25-29.

Je désignerai en abrégé mon mémoire par le mot COIGNET.

l'*Invention nouvelle en Algebre* substitue peut-être déjà aux démonstrations par la règle et le compas, l'algorithme de VIÈTE, il se garde de le dire. Mais il ne faut pas oublier que la *Géométrie* de DESCARTES est de 1637. L'idée de cette substitution n'avait pas encore été lancée par le monde et GIRARD ne se trompait pas en croyant que sa formule aurait du prix aux yeux de ses comtemporains.

« *IV. Cas.* Les trois costez donnez ».

Deux solutions. 1° « On peut faire une perpendiculaire sur le plus grand costé ; puis cercher les segmens de la susdite base, par la troisiesme reigle premise. Alors on aura deux triangles rectangles dont l'un cogneu, l'autre sera facil à cognoistre ».

2° « Autre operation nouvelle sans mener de perpendiculaire.

» Après avoir choisi lequel des angles je veux cognoistre, j'appelle *base* sa soutendente ; du quarré de laqulle je soustraict le quarré de la différence des costez, et joins au reste autant de zéro qu'il y en a au raid ; ce qu'estant divisé par le double produit des costez, alors le quotient sera le verset de l'angle requis ».

Algébriquement

$$\text{sin. vers C} = \frac{[c^2 - (a-b)^2]\,R}{2ab}.$$

C'est la formule donnée dans la troisième solution du cas précédent.

Vient ensuite : « *Des triangles rectangles en particulier par les tang. et secan.* ».

GIRARD y donne cette règle :

« En tout triangle rectangle, l'un des costez comprenant l'angle droit estant pris pour le raid, alors l'autre costé sera la tangente et l'hypotenuse la secante, le tout de l'angle opposite à la tangente ».

« *Fin des triangles rectilignes* ».

Après celà et avant la trigonométrie sphérique, un court appendice « *Des Polygones rectilignes en général* » contient sept propositions sans grand intérêt.

« *Des Triangles Spheriques* ».

On le sait, EUCLIDE n'a pas donné la théorie des triangles sphériques. GIRARD commence donc par énoncer 20 « Principes », évidemment destinés à combler en partie cette lacune des *Éléments*. Quelques-uns de ces principes sont des théorèmes élémentaires qui ont continué à figurer

dans nos manuels. Par exemple le 7°, « Le plus grand costé soutient le plus grand angle ; le plus petit soutient le moindre, et le moyen le moyen : et au contraire », c'est-à-dire, et réciproquement.

Quelques autres principes sont plutôt des théorèmes, mais qui n'auraient plus aujourd'hui de raison d'être. Tels sont ceux qui servaient à distinguer si l'arc fourni par les tables donnait la solution du problème, ou si c'était l'arc supplémentaire qu'il fallait prendre.

D'autres, enfin, sont des définitions. Il n'est pas inutile de transcrire ces dernières.

« 1. *Triangle Spherique* est une figure en la superficie de la Sphere, formée de trois arcs de cercles majeurs, estant un chacun costé posé moindre que le demi cercle.

» 6. Un Triangle *ambligone* a ses trois angles obtus, et *oxigone* trois aigus.

» 8. Il y a trois especes d'arcs, comme le *quadrant*, et deux *difformes*, l'un est majeur au quadrant appellé *abondant*, et l'autre moindre au quadrant appellé *défaillant*. Car de l'*extravagant* qui est entre le cercle et le demi-cercle, nous n'en parlerons pas aux triangles ». Ces expressions d'arcs *abondant* et *défaillant* sont d'un fréquent emploi chez GIRARD.

« 9. Il y a trois especes d'angles, comme le *droit*, et deux obliques dont l'un est *obtus* et l'autre *aigu*. Quant au *reverse* qui est entre 180 et 360 deg., nous n'en parlerons pas aux triangles.

» 10. Deux arcs qui font ensemble un demi-cercle sont dits estre *adjoints* l'un de l'autre ». Nous avons déjà rencontré cette définition.

Suivent quelques remarques, après lesquelles la théorie des triangles sphériques débute par un « *Theoreme General.* En tout triangle sphérique les sinus des angles ont mesme raison, l'un comme l'autre, aux sinus des costez opposites ».

Puis viennent les six cas des Triangles rectangles.

Ce qui s'y fait d'abord remarquer ce sont les notations conventionnelles de GIRARD. L'hypoténuse se désigne par H ; l'un des côtés de l'angle droit, la base, par B ; l'autre côté, la perpendiculaire, par P ; l'angle opposé à la base, par A ; l'angle opposé à la perpendiculaire, par V ; enfin, un point intérieur bien visible, désigne dans les figures, l'angle qui est supposé droit. Les dessins sont assez grossiers et doivent être corrigés par l'imagination.

En ce qui concerne les formules trigonométriques, les majuscules désignent les éléments eux-mêmes ; les minuscules, leurs compléments. Les abréviations *tan* et *sec* s'écrivent en italiques, non pas à gauche,

mais au-dessus de la lettre qu'elles affectent. Enfin, quand une lettre n'est surmontée d'aucune indication, il s'agit d'un sinus. D'après cela

$$\overset{tan}{A} = \text{tang } A, \qquad \overset{sec}{A} = \text{séc } A, \qquad A = \sin A,$$

$$\overset{tan}{a} = \cot A, \qquad \overset{sec}{a} = \text{coséc } A, \qquad a = \cos A.$$

Autre particularité. Les énoncés ne sont jamais donnés en langage courant, mais par une figure sur laquelle les éléments connus sont marqués de deux traits quand il s'agit d'un côté, et d'un petit arc de cercle quand il s'agit d'un angle.

Il y a naturellement six triangles de ce genre. Ils sont placés vers la gauche de la page, et à la droite de chacun d'eux se voit un petit tableau renfermant les formules de solution. Voici celui qui est relatif au premier cas. Les éléments connus sont l'hypoténuse H et l'angle A.

$$\left| \quad \text{Raid} \left\{ \begin{array}{cc|c} & \overset{tan}{H} & \overset{tan}{P} \\ \overset{a}{} & & \\ \overset{sec}{H} & \overset{tan}{a} & \overset{tan}{V} \end{array} \right. \right.$$

ce qu'il faut lire comme suit :

$$\frac{R}{\cos A} = \frac{\text{tang } H}{\text{tang } P}; \qquad \frac{R}{\text{séc } H} = \frac{\cot A}{\text{tang } V}.$$

Les formules relatives aux triangles rectangles sont toutes analogues à celles que nous venons de transcrire. Elles ont la forme de proportions dans lesquelles les moyens sont les deux termes connus ; les extrêmes sont d'une part le sinus de 90° ou *Raid*, de l'autre le terme inconnu. GIRARD va nous donner une règle qui en abrège souvent le calcul.

« *Nouvelle Reigle.* Trois arcs estant donnez, dont le premier soit quadrant, trouver un autre arc ainsi que les sinus soyent proportionnaux, par l'aide de l'addition ou de la soubstraction seulement ».

La réponse à la question est numérique, et consiste en exemples résolus par une méthode qui se nommait alors *Prosthapheresis*, ou Règle de la *Prosthaphérèse*. Le problème à simplifier était le suivant :

Étant donnée la proportion

$$\frac{\sin 90°}{\sin A} = \frac{\sin B}{\sin x},$$

on demande de déterminer $\sin x$ par voie d'addition ou de soustraction ?

Le Samielois supposait le lecteur assez avisé pour comprendre que le facteur sin 90° était sans importance dans la question et que toute la difficulté consistait à transformer en somme ou en différence le second membre de

$$R \sin x = \sin A \sin B.$$

Or, des démonstrations très simples, faites sur des figures géométriques élégantes, fournissaient aux calculateurs les relations dites de la Prosthaphérèse

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos (A - B) - \cos (A + B)] R,$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos (A - B) + \cos (A + B)] R,$$

qui leur permettaient en pratique de se tirer d'affaire à peu près dans tous les cas. C'était, on le voit, le procédé inverse de celui que nous imposent les tables de logarithmes. Il m'est arrivé de l'appliquer par curiosité. J'ai constaté, qu'à condition d'avoir sous la main une table de lignes naturelles, il était resté le meilleur plus souvent qu'on ne pourrait peut-être le croire.

Malgré l'intérêt de l'histoire de la Prosthaphérèse, je ne puis songer à l'écrire ici. Le sujet a d'ailleurs été traité magistralement et en quelque sorte épuisé par von Braunmühl dans un article intitulé *Zur Geschichte der prosthaphäretische Methode in der Trigonometrie* (1). Le savant munichois l'a ensuite résumé dans ses *Vorlesungen ueber Geschichte der Trigonometrie* (2). Je renvoie à ce double travail le lecteur qui désirerait prendre une connaissance complète du sujet. Pour mettre ce que l'on doit à Girard au point, il suffit d'extraire de von Braunmühl ce qui suit.

On trouve des exemples isolés de « Prosthaphérèse » bien antérieurement au dernier quart du XVIe siècle, mais c'est Tycho Brahé qui aperçut l'importance des simplifications que la méthode apportait aux calculs des astronomes. Aidé d'un de ses collègues, Paul Wittich, il écrivit une trigonométrie ou plutôt un recueil de règles énoncées sans démonstration, et dans lesquelles les principales formules de la résolution des triangles sphériques étaient transformées par la Prosthaphérèse. On connaissait depuis longtemps l'existence de ce précis de trigonométrie,

(1) Publié dans *Festschrift zum siebzigsten Geburtstage* Moritz Cantor. *Zugleich neunsten Heft der Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik.* Im Austrage herausgegeben M. Curtze und S. Günther. Leipzig, Teubner, 1899, pp. 15-29.

(2) T. I. Leipzig, Teubner, 1900. Voir la table au mot « Prosthaphäresis ».

qui n'a cependant été publié qu'à la fin du siècle dernier (1). C'est que tout en le communiquant à ses assistants de l'Observatoire d'Uranibourg, Tycho Brahé leur imposait à son sujet un secret rigoureux. Question de garder à l'usage exclusif des calculateurs de l'établissement qu'il dirigeait, un instrument qui leur donnait un avantage réel sur leurs collègues des observatoires rivaux.

Malheureusement pour le succès de son dessein, Tycho se brouilla avec un de ses aides, savant distingué, mais de mauvais caractère. C'était Nicolas Reimers, Ursus Dithmarsus, l'Ours de la marche de Dithmarsch en Holstein, comme cet homme brutal aimait à se qualifier lui-même. Il publia en 1588 son *Fundamentum Astronomicum* (2) dans lequel, par esprit de vengeance, il divulguait les secrets de son ancien maître. Ce n'en était pas moins un service signalé rendu à la science. Présenté autrement, loin de soulever des critiques, il n'eut mérité que des éloges.

Pour ne rien exagérer de l'effet produit, il faut le dire, les nouvelles formules n'attirèrent pas, immédiatement, ni partout, sur elles l'attention qu'elles méritaient. C'est ainsi qu'on n'en trouve pas de trace, dans un manuel de trigonométrie des plus estimables qui vit le jour dans nos Provinces, les Philippi Lansbergii *triangulorum geometriae libri quatuor* (3).

(1) Tychonis Brahe *Triangulorum planorum et sphaericorum praxis arithmetica...* Nunc primum edidit Dr. F. J. Studnicka... Pragae Bohemiae. J. Fanky, 1886. Fac-similé photogravé du manuscrit original.

A la demande de M. Mansion, je lui ai jadis consacré une étude *La Trigonométrie de* Tycho Brahé dans : *Rev. des Quest. scient.* t. L, Louvain, 1901, pp. 585-601.

La *Triangulorum praxis* de Tycho Brahé a été rééditée depuis, avec d'autres pièces sur le même sujet, dans la grande édition des Œuvres complètes de Tycho Brahé publiée sous les auspices de l'Académie danoise des Lettres et Sciences : Tychonis Brahe Dani *Opera omnia* edidit I. L. E. Dreyer. Hauniae, MCMXIII. In libraria Gyldendania, pp. 281-81-305.

(2) Nicolai Raymari *Vrsi Dithmarsi Fvndamentvm astronomicvm* ... Argentorati. Excudebat Bernardus Iobin. 1588. Ch. III, pp. 16v°-17v°.

Ouvrage qui joue un rôle important dans l'histoire de la trigonométrie. Je lui ai consacré une note. Voir : Coignet, pp. 17-20. J'ai eu jadis à ma disposition à Bruxelles l'exemplaire aujourd'hui détruit de l'Université de Louvain. Je n'en connais pas d'autre en Belgique.

(3) Lvgdvni Batavorvm, Ex officina Plantiniana, Apud Franciscum Raphelengium. CIↃ. IↃ. XCI. (J'en possède un exemplaire).

Képler tenait les tables de lignes trigonométriques naturelles de cet ouvrage, comme les meilleures qui existassent. (Voir : *De motibus stellae Mustis*, pars 2 cap. 15 ; dans, Joannis Kepleri *astronomi Opera omnia* edidit Dr. Ch. Frisch, t. III, Francafusti a. M. et Erlangae, Heyder et Zimmer, 1860, p. 235, et la note de l'éditeur, p. 477). L'estime des contemporains pour l'ouvrage de van Lansbergen était générale.

Mais à Rome, le *Fundamentum Astronomicum* n'échappa pas à cet érudit toujours en éveil qu'était CLAVIUS. Il y remarqua les formules de la Prosthaphérèse et vit immédiatement le moyen de les appliquer à la multiplication de deux grands nombres quelconques. Il suffisait pour cela de préparer les deux facteurs par la multiplication ou la division d'une puissance de 10 convenablement choisie, puis de chercher dans les Tables les sinus équivalents. C'est un emploi des angles auxiliaires, à signaler pour son antiquité, bien qu'on en trouve cependant quelques exemples plus anciens ; c'est surtout une généralisation très pratique des formules divulguées par REIMERS. Le Jésuite publia sa méthode, en 1593, dans son *Astrolabium* (1), en ayant soin d'ajouter que les multiplications et les divisions par les puissances de 10 ne pouvaient pas se faire sans quelques précautions, sous peine de s'exposer à des résultats erronés.

Tel était, en ce qui concerne la Prosthaphérèse, l'état de la question au moment où GIRARD écrivait.

Mais qu'en connaissait notre auteur ?

Certainement les deux formules que REIMERS avait données dans le *Fundamentum Astronomicum*. Probablement aussi tout ce que CLAVIUS y avait ajouté dans son *Astrolabium*. Le Professeur du Collège Romain et son ouvrage étaient trop célèbres pour que le Samielois les put ignorer. Mais j'ai dit « probablement », car les exemples numériques traités dans sa *Table des Sinus* ne permettent pas d'être tout à fait affirmatif.

Pour terminer ce sujet, je rappellerai en passant, que la Prosthaphérèse fut portée à son point culminant par l'astronome danois LONGOMONTANUS, disciple dévoué de TYCHO BRAHÉ, fidèle tenant de ses méthodes, resté toujours peu favorable et presque l'adversaire des tables de logarithmes. Son *Astronomia Danica* (2) qui ne manque pas de mérite est de 1640.

(*A continuer*)

PHILIPPE LANSBERGEN OU VAN LANSBERGEN naquit à Gand, le 25 août 1561, et mourut à Middelbourg, le 8 novembre 1632. Sa trigonométrie fut rééditée deux fois : Amstelodami, apud Guillelmum Blaeuw, 1631 (Bibl. Roy. de Belg.) et ensuite dans PHILIPPI LANSBERGII *Astronomi celeberrimi Opera omnia*. Middelburgi Zelandiae, apud Zachaeum Roman, 1663 (Bibl. Roy. de Belg.).

(1) CHRISTOPHORI CLAVII *Bambergensis e Societate Iesv Astrolabivm*, Romae, impensis BARTHOLOMAEI GRASSI. Ex Typographia Gabiana. M.D.XCIII, pp. 178-192 (Bibl. Roy. de Belg.).

Réédité dans CHRISTOPHORI CLAVII *Bambergensis e Societate Iesv Opera Mathematica*. t. III, Moguntiae, sumptibus ANTONII HIERAT, excudebat REINHARDUS Eltz, M.DC.XIII, pp. 94-100. (Bibl. Roy. de Belg.). L'édition n'est pas rare.

(2) Amsterdami, Apud Ich. et Cornelium Blaeuw, M.DC.XXXX. (Bibl. Roy. de Belg.). Voir : *Doctrina prosthaphaeretica*, pp. 7-16 ; et plus spécialement pp. 7-8.

SUR L'ISOPOLE D'UNE DROITE,

par M. CL. SERVAIS, Professeur à l'Université de Gand.

1. On considère un triangle ABC circonscrit à une parabole (P), les côtés AB, AC sont fixes, le côté BC est mobile et les ponctuelles (B), (C) sont semblables. On mène par les sommets A, B, C trois parallèles qui coupent, sous un angle positif $\theta < \pi$, une droite donnée m aux points A′, B′, C′. Les ponctuelles (B′), (C′) semblables à (B) et (C) sont semblables entre elles. On désigne par M le point de rencontre des normales d'angle $\pi - \theta$ menées des points B′, C′ respectivement sur les côtés CA, BA. De la similitude des ponctuelles (B′), (C′) résulte que le point M décrit une ponctuelle (M) semblable à (B′), (B). Le point à l'infini A_∞ de la tangente mobile BC décrit une ponctuelle projective à (B), (M) et on a les faisceaux projectifs

$$A'(A_\infty) \barwedge A'(M).$$

Quand la tangente mobile BC est parallèle à AA′ ou coïncide avec chacune des tangentes fixes AB, AC, la construction du point M correspondant montre que l'angle positif des rayons homologues $A'A_\infty$, A′M est égal à $\pi - \theta$; par suite deux rayons homologues quelconques des faisceaux projectifs $A'(A_\infty)$, $A'(M)$ jouissent de la même propriété et la normale d'angle $\pi - \theta$ menée de A′ au côté BC passe par M. Ce point est l'isopôle d'angle θ de la droite m relativement au triangle ABC (THIRD. M, 1913-91).

2. La démonstration précédente du théorème de THIRD montre que les isopôles d'angle θ de la droite m relativement aux triangles considérés sont situés sur une droite s. Ces triangles circonscrits à la parabole (P) ont un sommet commun A ; mais il est aisé de montrer que la droite s ne dépend que de la parabole, de la droite m et de l'angle θ. En effet, quand le côté BC fait avec la droite m l'angle positif θ, l'isopôle de m relativement au triangle correspondant ABC est à l'intersection des trois droites BC, m, s. Ce point $S \equiv (m, s)$ est donc indépendant de la position du sommet A.

SOMMAIRE.

Pages

La trigonométrie d'ALBERT GIRARD, (La Haye, 1626), par M. H. BOSMANS, S.-J. 385

Sur le lieu du centre du cercle circonscrit à un triangle podaire bilogique, par M. ROLAND DEAUX 393

Sur les carrés symétriques, par M. V. THÉBAULT 395

Exercices de Géométrie vectorielle (AD. M.) 400

Récréation mathémathique 403

Bibliographie 408

Notes mathématiques 410

Solutions de questions proposées (2106, 2275, 2323, 2338, 2345, 2348) 419

Questions d'examen. 431

Questions proposées. 432

Supplément.

Chaque abonné doit procurer un nouvel abonné à « Mathesis ».

AVIS AUX ABONNÉS

Le renchérissement de tout ce qui concerne les travaux d'impression et du prix des envois par la poste, nous oblige à augmenter de **5** fr. le prix de l'abonnement et à le porter à **20** fr. pour la Belgique et à **25** fr. pour la France et l'Étranger. On aurait pu ramener de 48 à 32 le nombre des pages des livraisons mensuelles, mais cela aurait retardé encore la publication des articles que nous avons depuis longtemps en portefeuille, ce qui n'est pas désirable. *Mathesis* acceptera avec reconnaissance que des abonnés, trouvant le prix demandé toujours trop faible, donnent davantage.

LA TRIGONOMÉTRIE D'ALBERT GIRARD, (La Haye, 1626), (*)

par M. H. BOSMANS, S.-J.

« Des triangles spheriques obliquangles ».

GIRARD commence par deux définitions importantes : celle des triangles sphériques *consorts*, et celle des triangles sphériques *reciproques*. Pour suivre aisément la première, le lecteur est prié de dessiner la figure suivante.

Soit un triangle sphérique OAB. Achevons la circonférence à laquelle appartient l'arc AB ; puis prolongeons l'arc AO jusqu'à sa rencontre en C avec cette circonférence ; l'arc BO jusqu'à sa rencontre en D.

« Devant que passer plus outre, je diray comment on peut changer un triangle donné, encore en 3 autres manieres correspondentes en quelque façon, ce qui servira pour faciliter la recherche du requis. Comme quand plusieurs angles ou costez surpassent 90 degrez, alors on en peut choisir un plus commode à l'operation. Ces 4 triangles donc, à cause de l'affinité qu'il y a de l'un à l'autre, seront appellez les 4 *consorts*. Un nom assez convenable. Qui en trouvera un meilleur il est prest à ceder.

« A c'este fin soit donc un triangle OAB quelquonque, et soit achevé le cercle de l'un des costez ABCD ; et les autres costez prolongez jusques à C, D.

« Alors on verra les 4 triangles susdits, egaux ensemble à l'hemisphere. Et touchant ceste correspondence, AC, BD sont demicercles, et aussi BAD, BCD, ABC, ADC. Les angles opposez au sommet O sont egaux ; aussi les opposites en A, C, et en B, D. Item les arcx BC, AD egaux, de mesme AB, CD.

« Et n'y peut avoir que 4 triangles ; car les deux cercles achevez, il y en aura 8 à l'entour de la sphere, mais il y en aura tousiours deux opposites pareils ».

Ce qui suit mérite toute l'attention.

« Cela fait, il y a encore une autre maniere fort commode, c'est que le triangle proposé (qui ne soit l'equilatéral contenant la $\frac{1}{8}$ de la superf. totale) a 4 *reciproques*, ainsi appellez parce que les costez de l'un sont reciproques aux angles de l'autre, chacun au sien. Car *les costez de l'un ont leurs poles aux sommets des trois angles de l'autre* ; et partant les costez de l'un sont egaux ou adjoints des angles de l'autre. Or je

(*) Suite, voir M, 1926-337.

diray cy apres en son lieu la maniere de trouver lesdits reciproques selon que l'on l'a pratiqué jusques à present ».

Ces triangles réciproques sont l'une des plus belles découvertes de GIRARD, car parmi eux se trouve le vrai triangle polaire ou supplémentaire.

Quelques précisions historiques sont ici nécessaires. CHASLES a remarqué, dans son *Aperçu historique* (1), que déjà VIÈTE avait considéré les triangles formés par des arcs de grand cercle décrits des sommets du triangle donné comme pôle, mais que néanmoins le plus important d'entre eux, le vrai triangle supplémentaire, lui avait échappé. C'est à SNELLIUS, ajoute-t-il, qu'on en doit la découverte.

Il est vrai. Mais pour être parfaitement exact, ou si l'on préfère, tout à fait complet, l'historien français eut été mieux inspiré en disant, que le triangle supplémentaire était dû à SNELLIUS et à GIRARD. Le géomètre hollandais l'a, en effet, donné dans la proposition VIII du livre III de ses *Doctrinae triangulorum canonicae libri quatuor* (2). Mais ceux-ci ne furent publiés qu'en 1627, un an après la première édition des *Tables de sinus* de GIRARD. Le Samielois ne saurait donc avoir emprunté le triangle polaire à SNELLIUS.

D'autre part, les *Doctrinae triangulorum libri* de SNELLIUS sont une œuvre posthume, dont l'auteur était mort l'année précédente. Personne ne l'a jamais soupçonné d'avoir plagié les *Tables de sinus* de GIRARD. Aucun argument nouveau ne vient appuyer pareille hypothèse. Voilà donc une fois de plus qu'une découverte importante est faite par deux savants indépendamment l'un de l'autre. Je me plais à signaler ce genre de coïncidences chaque fois que je le rencontre. Celle-ci s'explique d'autant mieux, que le triangle polaire dérive naturellement des triangles de VIÈTE.

GIRARD ne donne pas ici le moyen de distinguer le vrai triangle polaire, des trois autres triangles réciproques. Mais, les applications de sa définition, qui viennent plus loin, montrent qu'il avait cependant des idées précises et fort nettes sur le sujet. Toutefois, à l'exemple des autres algébristes de son temps, il a encore un faible pour les méthodes graphiques. A preuve, ceci : il vient de ramener le calcul des côtés d'un triangle dont on connaît les trois angles au calcul des angles de son triangle polaire dont on connaît les trois côtés. Puis, prévoyant qu'il soit aisé de se tromper dans le choix à faire parmi les quatre triangles réciproques ; craignant même qu'on puisse être exposé à les confondre avec les consorts, il donne ce conseil : « Il faut noter qu'afin de ne prendre

(1) 3e éd., Paris, Gauthier-Villars, 1889, p. 55.

(2) Lugduni Batavorum, ex-officina Joannis Maire, M.DC.XXVII, pp. 120-122. (Bibl. Roy. de Belg.).

les réciproques, consors, et le proposé (c'est-à-dire, le triangle polaire) l'un pour l'autre, il le faut escrire joignant les figures (1) ».

Il serait fastidieux de suivre GIRARD dans les nombreux cas particuliers qu'il traite au long. Ceux-ci ne manquaient pas d'utilité pour les contemporains, car ils étaient destinés à leur procurer des « facilitez » c'est-à-dire, à leur indiquer des simplifications, parfois notables. Dès lors ils avaient leur raison d'être. Ces cas particuliers sont souvent résolus avant les cas généraux.

Quant à ces derniers, voici deux remarques d'ensemble : 1. Les triangles obliquangles peuvent se résoudre en les décomposant en deux triangles rectangles. 2. Le nombre des cas élémentaires peut se réduire de moitié par l'emploi du triangle polaire.

En appliquant cette seconde remarque, l'auteur ramène d'abord la recherche des côtés d'un triangle dont on connaît les trois angles, au calcul des angles du triangle polaire dont on connaît les trois côtés. Je viens d'y faire allusion. Voici la solution de ce deuxième problème.

On y prend pour point de départ la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique, depuis longtemps classique et partout en usage.

(1) L'édition de 1627 donne lieu à quelques observations intéressantes ; c'est le moment de les indiquer. Elle a d'abord une addition au titre qui montre combien GIRARD se rendait compte de l'importance des triangles *consorts* et *réciproques*.

« *Tables des sinus* ... etc... Le tout reveu, corrigé et augmente d'un Appendice à la fin, par l'autheur mesme, où se voit une nouvelle et tresutil Invention des Reciproques, lesquels avec les Consorts, comprennent brievement une bonne partie de la Trigonometrie sphérique incogneuë jusques à présent ».

L'Appendice dont il est question n'a que huit pages, dans lesquelles on peut distinguer trois parties :

1° « Trouver les 4 reciproques d'un triangle spherique donné ».

2° L'« Explication sur la Table (= la formule de résolution) des deux costez donnez et l'angle qu'ils comprennent ». J'y reviendrai tantôt.

3° Des « Theoremes ». Ce sont de purs exercices.

Revenons à la première partie. Il y a deux manières de dessiner sur le papier les réciproques, dont la première au gré de l'auteur est « la plus aisée ». C'est effectivement la plus simple. Il faut supposer que les six « termes », c'est-à-dire les trois côtés et les trois angles du triangle donné, sont numériquement connus ; puis dessiner un triangle sphérique dont les côtés soient les suppléments des angles du premier, enfin, achever le dessin des trois consorts du second triangle.

GIRARD observe au sujet de ce dessin qu'en partant d'un quelconque des consorts du triangle donné, et en lui appliquant la construction précédente, on obtient toujours les quatre mêmes réciproques. Il engage le lecteur à s'en assurer par une mise en nombres qu'on écrira « joignant la figure ».

Mais il faut, bien entendu, se rappeler que le rayon du cercle trigonométrique y est toujours mis en évidence. Avec GIRARD appliquons la, au triangle ABD et pour préciser les idées écrivons la comme suit :

$$R \cos d = \cos a \cos b + \frac{1}{R} \sin a \sin b \cos D. \qquad (1)$$

Notre auteur ne l'emploie cependant jamais sous cette forme. Pour comprendre son texte et en goûter l'élégance, nous modifierons la formule en raisonnant, comme il a probablement raisonné lui-même, il y a, année pour année, trois siècles. S'il se peut, nous oublierons, pendant cet exercice, ce qu'on a appris depuis lors.

GIRARD remarque d'abord qu'on peut toujours supposer que les côtés a et b sont inférieurs à 90°, car si cela n'était pas, on opérerait sur un triangle *consort* où cette condition est vérifiée. Nous admettrons que c'est au besoin chose faite.

Ajoutons et retranchons au second membre de (1) le rectangle $\sin a \sin b$, il vient

$$R \cos d = (\cos a \cos b + \sin a \sin b) + \frac{1}{R} \sin a \sin b \,(R - \cos D).$$

Or, il a été démontré que

$$\cos a \cos b + \sin a \sin b = R \cos (a - b).$$

Comme par définition $(R - \cos D) = \text{sin.vers } D$, il vient donc

$$R \cos d = R \cos (a - b) - \frac{1}{R} \sin a \sin b \,\text{sin.vers } D. \qquad (2)$$

Trois cas peuvent maintenant se présenter,

1° $a + b = 90°$. Il a été démontré que

$$2 \sin a \cos a = R \sin 2a.$$

et en tirant de l'hypothèse $b = 90° - a$, (2) devient

$$R \cos d = R \sin 2a - \frac{1}{2} \sin 2a \,\text{sin.vers } D,$$

d'où

$$\text{sin.vers } D = \frac{\sin 2a - \cos d}{\sin 2a} \cdot 2R.$$

2° $a + b < 90°$. Nous modifierons cette fois (2) par la formule de la prosthaphérèse

$$\sin a \sin b = \frac{R}{2} [\cos (a - b) - \cos (a + b)],$$

il vient

$$R \cos d = R \cos (a - b) - \frac{1}{2} [\cos (a - b) - \cos (a + b)] \,\text{sin.vers } D ;$$

d'où

$$\text{sin.vers } D = \frac{\cos (a - b) - \cos d}{\cos (a - b) - \cos (a + b)} \cdot 2R.$$

3° $a + b > 90°$. Pour un géomètre du XXe siècle la formule précédente est générale ; mais il n'en était pas de même pour GIRARD qui n'affectait pas ses lignes trigonométriques de signe. Puisqu'il a suposé que a et b sont aigus, $\cos (a + b)$ serait aujourd'hui négatif, $\cos (a - b)$ positif ; quant à $\cos d$ on n'en connait pas le signe. Il est donc clair, qu'en prenant les cosinus en valeur absolue, un raisonnement analogue au précédent conduira à

$$\text{sin.vers } D = \frac{\cos (a - b) \pm \cos d}{\cos (a - b) + \cos (a + b)} \cdot 2R$$

formule dans laquelle il faut affecter $\cos d$ du signe + quand d est obtus et du signe — quand d est aigu.

En intercalant au fur et à mesure dans le texte de GIRARD l'interprétation des formules en notations modernes, ce texte ne présentera plus maintenant, je crois, de difficulté. Peut-être un peu d'attention y sera-t-elle encore nécessaire ; car en le lisant il ne faudra pas perdre de vue que dans la rédaction originale les majuscules et les minuscules n'ont pas le même sens que celui qu'elles ont dans les formules d'interprétation que nous venons de donner et que nous allons retranscrire. Répétons-le, chez GIRARD les majuscules représentent les éléments eux-mêmes, les minuscules leurs compléments ; dans les formules d'interprétation, les majuscules sont les angles, les minuscules les côtés.

« *Table des trois costez donnez.*

» Soyent les trois costez donnez A, B, D. L'on en requirt l'angle compris des deux costez A, B dont B est le plus grand des deux ; et néantmoins l'un et l'autre defaillans ; ce qui se peut faire par les consorts quand il en sera de besoing.

» Les petits caracteres signifient complement.

» Il y a trois exemples, et notez qu'il faut prendre le sinus des choses qui sont encloses de parentheses ( ).

» Quand A et B sont ensemble un quadrant

$$\frac{(2A) - (d)}{(2A)} \text{ le tout multiplié par le diamet.}$$

pour le verset de l'angle requis.

$$\left[\frac{\sin 2A - \cos d}{\sin 2A} \cdot 2R = \text{sin.vers D}\right].$$

» Notez que (2A) signifie qu'il faut prendre le sinus de deux fois l'arc A.

» Si A et B sont ensemble moindre au quadrant

$$\frac{(A + b) - (d)}{(A + b) - (b - A)} \text{ le tout multiplié par le diamet.}$$

pour le verset de l'angle requis.

$$\left[\frac{\cos (a - b) - \cos d}{\cos (a - b) - \cos (a + b)} \cdot 2R = \text{sin.vers D}\right].$$

» Si A et B sont ensemble majeurs au quadrant

$$\frac{(A + b) \overset{+}{\underset{-}{\text{ou}}} (d)}{(A + b) + (A - b)} \text{ le tout multiplié par le diamet.}$$

pour le verset de l'angle requis.

$$\left[\frac{\cos (a - b) \pm \cos d}{\cos (a - b) + \cos (a + b)} \cdot 2R = \text{sin.vers D}\right].$$

» Si D abonde, prenez le + ; autrement si D defaut prenez le —.

» Que si D est quadrant, c'est tout un, aussi bien d (= cos d) n'est rien ».

Avant de passer outre, il faut remarquer l'emploi du symbole ± qui en est le plus ancien exemple connu ; encore GIRARD sépare-t-il, par la conjonction *ou*, les signes superposés.

J'abrège. Dans le cas suivant notre auteur cherche le troisième côté d d'un triangle ABD dont les deux côtés a et b sont connus, ainsi que l'angle D qu'ils comprennent. Si a et b ne sont pas tous les deux aigus,

on opérera de nouveau sur un triangle consort. Cela posé, le côté inconnu d sera donné par la formule fondamentale, écrite en notations modernes comme suit, tous les cosinus y étant pris en valeur absolue

$$\frac{[\cos (a - b) \pm \cos (a + b)] \times \frac{1}{2} \text{ sin.vers D}}{R} - \cos (a - b) = \cos d.$$

Quand $a + b > 90°$, il faut prendre cos $(a + b)$ avec le signe + ; quand $a + b < 90°$, il faut prendre cos $(a + b)$ avec le signe —.

Puis, vient cette remarque importante, preuve que GIRARD a vu qu'il eut dû, dans le second membre de sa formule, affecter la valeur absolue de cos d d'un double signe :

« Quand l'application (c'est-à-dire la fraction du premier membre) est majeure au sinus de (A + b), [= cos $(a - b)$] la base requis abondera ; si mineure elle défaudra, si egale, quadrant [1] ».

Puis, plus loin, il dit : « Touchant le cas qui a deux angles donnez sur la base cogneue, on le pourrait resoudre par le reciproque ».

Quant à la solution des deux cas dits aujourd'hui douteux, elle n'est qu'ébauchée. Il faut faire cesser l'indétermination, puis décomposer le triangle donné en deux triangles rectangles.

« Quant au cas, dont les deux costez et un angle non compris d'iceux, il faut sçavoir l'espece de l'incognu — opposite au costé donné —. Iceluy se resoudra facilement par les rectang. Quant au cas de deux angles et un costé opposite à l'un d'iceux, il faut aussi sçavoir l'espece du costé incogneu, qui est opposite à l'angle cogneu ».

---

[1] Ces explications parurent probablement peu claires aux premiers lecteurs de GIRARD, qui y revint dans l'Appendice de l'édition de 1627. Pour élucider le sujet, il développe jusqu'au bout une application numérique ; après quoi vient une définition par laquelle il eut été plus méthodique de commencer.

« Notez que j'appelle *Aplication* un numerateur et denominateur separez par une ligne. Cette déclaration entendue les autres choses seront faciles ».

Restait, cependant, une dernière difficulté. Un caractère d'imprimerie brisé avait fait disparaitre en partie un signe d'opération et rendait la lecture d'une formule douteuse. « Afin, qu'il n'y ait pas d'achoppement, il faut un peu mieux marquer en ladite Table (= ladite formule) un trait qui n'apparait pas assez ».

Cette faute, et la complication typographique de la formule dans le texte original, l'eussent rendue un peu difficile à reproduire ; c'est ce qui m'a décidé à n'en donner que l'équivalent en notations modernes.

Suivent quatre formules intéressantes, que GIRARD attribue à VIÈTE. Il en donne d'abord le tableau, puis définit le triangle auquel elles s'appliquent. Pour la clarté, je fais l'inverse.

« Soit un triangle ABD spherique, et AC perpendic. de l'angle A sur le costé opposite BD. Il s'ensuivra quatre proportions. Notez que 2 lettres signifient un costé, autrement, (= d'autre part) une ou trois lettres signif. l'angle.

» *Theoremes de* FRANÇOIS VIÈTE [1].

sec. BAC	*sec.* DAC	*tan.* AB	*tan.* AD
sec. CB	*sec.* CD	*sec.* AB	*sec.* AD
sin. CD	*sin.* CB	*tan.* D	*tan.* B
sin. BAC	*sin.* DAC	*sec.* B	*sec.* D ».

Ce qui doit se lire :

séc BAC : séc DAC = tang AB : tang AD,

séc CB : séc CD = séc AB : séc AD,

sin CD : sin CB = tang B : tang D,

sin BAC : sin DAC = séc D : séc B.

(*A continuer*).

---

[1] GIRARD ne dit pas où VIÈTE les a donnés. Un examen, assez rapide, je dois le dire, du *Canon Mathematicus*, Lutetiae, apud Joannem Mettayer, 1579 (Coll. de la Compagnie de Jésus à Louvain) et du FRANCISCI VIETAE *variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII*. Turonis, apud Jamellium Mettayer, 1593 (Bibl. Roy. de Belg.) ne m'a donné aucun résultat.

TROPFKE, toujours si exact, reproduit les 4 formules, dans la 2e édition de sa *Geschichte der Elementar Mathematik* (t. V, Berlin, Walter de Gruyter, 1923, p. 38) et les attribue à GIRARD sans faire la moindre allusion à VIÈTE. Je n'en conclurai pas que GIRARD se soit trompé. Peut-être avait-il vu un des opuscules de VIÈTE aujourd'hui perdu.

Le *Canon Mathematicus* n'eut qu'une édition, mais trois tirages avec des titres, des dates et des adresses d'imprimeurs différentes. L'exemplaire du Collège de la Compagnie à Louvain porte : Parisiis, apud Bartholomaeum Maccaeum, in Monte D. Hilarii, M.DC.IX.

Pour plus de détails, voir ma *Notice historique sur les diverses éditions du Canon Mathematicus de* VIÈTE, dans COIGNET, pp. 21 25.

SUR LE LIEU DU CENTRE DU CERCLE CIRCONSCRIT A UN TRIANGLE PODAIRE BILOGIQUE,

par M. ROLAND DEAUX, Professeur à l'École des Mines de Mons.

1. On sait qu'étant donné un quadrangle RSTU dont le triangle diagonal est ABC, le lieu des couples de points M_1, M_2 alignés sur un point fixe M et conjugués par rapport aux couples de côtés opposés du quadrangle est une cubique non singulière C_3. Les deux quaternes RSTU et ABCM forment deux quadruples dont les tangentiels sont M et son conjugué M′ par rapport au quadrangle ; le triangle pédal $M_aM_bM_c$ de M relativement au triangle ABC est inscrit à C_3 et ses sommets forment avec M′ un nouveau quadruple (R. DEAUX, M, 1923-316).

Une conique Σ du faisceau ponctuel (RSTU) rencontre une droite fixe *d* aux points D, E et les droites MD, ME en deux points D′, E′ conjugués harmoniques de D, E par rapport aux couples de points M_1 et M_2, N_1 et N_2 de la cubique C_3 situés sur MD, ME. Le faisceau des coniques Σ décrit sur *d* une involution de points projetée de M suivant une involution de rayons et celle-ci est projective au faisceau de coniques. Par suite, (génération de CHASLES pour les quartiques) les points D′, E′ décrivent un lieu du quatrième ordre ayant un nœud en M mais dont fait partie la droite *d*. Dès lors, *si par un point* M *d'une cubique générale* C_3 *on mène une droite variable* m *qui la rencontre en* M_1, M_2 *et qui coupe une droite fixe* d *en* D, *le lieu du conjugué harmonique de* D *par rapport aux points* M_1, M_2 *est une cubique* Γ_3 *de nœud* M *qui passe par les points de contact* R, S, T, U *des tangentes à* C_3 *issues de* M *et par les points de* C_3 *situés sur* d. *Les tangentes au nœud* M *passent par les points communs à* d *et à la conique* RSTUM.

COROLLAIRE. *La droite* D′E′ *passe par un point fixe de la cubique* Γ_3.

2. Si R, S, T, U sont les centres des cercles tritangents du triangle ABC, les points M_1, M_2 sont les foyers d'une conique inscrite à ce triangle et, en supposant la droite *d* à l'infini, D′ est le centre de cette conique. Par suite *le lieu des centres des coniques inscrites à un triangle et dont un axe passe par un point fixe* M *est une cubique de nœud* M *qui passe par les centres*

SOMMAIRE.

Pages

La trigonométrie d'ALBERT GIRARD, (La Haye, 1626), par M. H. BOSMANS, S.-J. 433

Étude géométrique des courbes de CESÀRO, par M. R. GOORMAGHTIGH 440

Sur un problème de distance minimum dans le tétraèdre, par M. FRANCIS-D. MURNAGHAN 448

Bibliographie 450

Notes mathématiques 452

Solutions de questions proposées (2324, 2329, 2339, 2342, 2352, 2360, 2362) 419

Questions d'examen 471

Questions proposées 473

Chaque abonné doit procurer un nouvel abonné à « Mathesis ».

AVIS AUX ABONNÉS

Le renchérissement de tout ce qui concerne les travaux d'impression et du prix des envois par la poste, nous oblige à augmenter de **5** fr. le prix de l'abonnement et à le porter à **20** fr. pour la Belgique et à **25** fr. pour la France et l'Étranger. On aurait pu ramener de 48 à 32 le nombre des pages des livraisons mensuelles, mais cela aurait retardé encore la publication des articles que nous avons depuis longtemps en portefeuille, ce qui n'est pas désirable. *Mathesis* acceptera avec reconnaissance que des abonnés, trouvant le prix demandé toujours trop faible, donnent davantage.

LA TRIGONOMÉTRIE D'ALBERT GIRARD, (La Haye, 1626), (*)

par M. H. BOSMANS, S.-J.

GIRARD termine sa trigonométrie théorique par un problème contre lequel SIMON STEVIN s'était buté ; problème en soit assez banal, mais que le Samielois résout très ingénieusement pour un géomètre du XVIIe siècle. En voici l'énoncé :

Étant donné un quadrangle sphérique quelconque — vulgaire, revers ou croisé (1), — dont on connait cinq termes — c'est-à-dire cinq éléments, angles ou côtés, — déterminer les trois autres.

STEVIN y distingue huit cas, d'après la position relative des angles et des côtés donnés (2). Il y ajoute 24 dessins, qu'il range par trois en huit groupes ou *figures* numérotées de 1 à 8. Chacune de ces *figures* contient le dessin des trois espèces de quadrangles. STEVIN résout sept *figures* sans difficulté. Elles ne donnaient lieu qu'à deux solutions différentes qualifiées d'*Exemples*.

Mais le Brugeois, nous venons de le dire, se buta contre la 5e *figure*, qui ne rentrait dans aucun des deux *Exemples* précédents et nécessitait par conséquent un troisième *Exemple*. C'était la *figure* où on connaissait trois angles et les deux côtés qui comprennent l'angle inconnu. Après l'avoir énoncé, STEVIN écrit non sans quelque humeur, (cela lui arrivait en pareille circonstance) (3) :

« *Note*. En descrivant ceste proposition je n'estois pas encore parvenu à la cognoissance des termes incognus de ceste 5e figure, de sorte que nous mettons seulement la suscription (= l'énoncé) de ce 3e Exemple, comme par memoire, pour ceux qui pourroient avoir l'envie de le cercher, afin d'avoir plus ample cognoissance du Traicté des polygones sphériques ».

Dans l'édition des *Œuvres de* STEVIN de Leyde 1634, GIRARD saisit la balle au bond et apostille la remarque (4) :

(*) Suite, voir M, 1926-385.

(1) Le quadrangle ou quadrilatère *revers* étant celui qui contenait un angle *revers*, c'est-à-dire, supérieur à 180 degrés. C'est STEVIN le premier, qui crut utile d'appeler l'attention sur ce fait, qu'il y a trois formes de quadrilatère. Il n'eut pas cependant l'idée de les réunir en une seule figure et d'en former ce que nous nommons aujourd'hui le quadrilatère complet. *Mémoires* t. I, pp. 166-167. *Œuvres*, t. II, p. 21. C'est la définition 2, de l'*Application des polygones plans*.

(2) *Mémoires*, t. I, pp. 173-174 et 282-283. *Œuvres*, t. II, pp. 24-25 et 89-90.

(3) *Mémoires*, t. I, p. 323. *Œuvres*, t. II, p. 90.

(4) *Œuvres*, t. II, p. 90.

« ALBERT GIRARD. Voyez la solution de cest Exemple en la page apres la K7 de mes Sinus de la deuxiesme edition ». Dans notre édition de 1626, elle se trouve pages K4v⁰ et K5r⁰.

A une première lecture, cette solution est malaisée à comprendre. Mais elle est très jolie quand on a pénétré le vieux français de GIRARD. La voici donc d'abord sous une forme moderne :

Soit ABCD le quadrangle sphérique considéré ; A, B, C, les trois angles et p, q les deux côtés données. Le problème sera évidemment résolu si l'on parvient à déterminer l'angle D compris entre ces deux côtés. Avec de très légères modifications, la démonstration vaut pour les trois formes du quadrangle ; mais pour fixer les idées nous la donnerons sur le quadrangle « vulgaire » ou convexe.

Menons la diagonale DB, et posons *ang* DBA $= x$, *ang* DBC $= y$, *arc* DA $= p$, *arc* DC $= q$, *arc* DB $= \lambda$. On a

$$x + y = \mathrm{B}.$$

Calculons $x - y$. Les deux triangles DBA, DBC donnent

$$\frac{\sin x}{\sin p} = \frac{\sin \mathrm{A}}{\sin \lambda}; \qquad \frac{\sin y}{\sin q} = \frac{\sin \mathrm{C}}{\sin \lambda},$$

d'où

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin \mathrm{A} \sin p}{\sin \mathrm{C} \sin q}.$$

Quand A = C le second membre se réduit à un rapport de deux sinus. Pour lui donner la même forme dans le cas général, GIRARD effectue une transformation qui revient à calculer deux angles auxiliaires φ et ψ en posant, ce qui est évidemment toujours possible,

$$\sin \varphi = \sin \mathrm{A} \sin p, \qquad \sin \psi = \sin \mathrm{C} \sin q.$$

Mais le degré d'avancement de l'Algèbre ne permettait pas d'opérer d'une manière aussi simple. GIRARD « substitue, dit-il, un côté à l'un des côtés donnés », ce qui au premier abord est peu intelligible. En continuant la lecture du texte, on parvient, cependant, sans trop de peine, à suppléer ce qui manque à l'énoncé de l'artifice employé et aux explications qui l'accompagnent. L'auteur effectue la transformation à l'aide d'un triangle sphérique rectangle auxiliaire, qui a le côté donné pour hypoténuse, et pour angle adjacent l'angle donné, ce qui lui permet de calculer un nouveau côté auxiliaire par la proportionnalité des sinus. Dans le cas actuel, il vient

$$\frac{\sin 90^\circ}{\sin p} = \frac{\sin \mathrm{A}}{\sin \varphi}; \qquad \frac{\sin 90^\circ}{\sin q} = \frac{\sin \mathrm{C}}{\sin \psi}.$$

Les côtés φ et ψ étant ainsi déterminés, GIRARD imagine un nouveau quadrangle sphérique dans lequel il les « substitue » aux côtés donnés et achève la solution sur ce nouveau quadrangle.

Pour cela il dit que l'opération qui reste à faire « n'est en rien dissemblable à l'opération du 3e cas des triangles plans, ou l'on cerche les 2 angles incogneus sans mener de perpendiculaire », c'est-à-dire, sans décomposer le triangle donné en deux triangles rectangles.

Il est donc clair, que partant de la proportion

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi},$$

il l'a par application des théorèmes du 5e livre des *Éléments* d'EUCLIDE, d'abord écrite sous la forme

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\sin \varphi - \sin \psi}{\sin \varphi + \sin \psi};$$

après quoi, en opérant sur chacun des deux membres, la transformation qu'il a exécutée dans le cas similaire des triangles rectilignes, il a obtenu la proportion des quatre tangentes

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x - y)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x + y)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi + \psi)}.$$

Cette belle généralisation de la formule de THOMAS FINK est restée classique et se lit encore dans tous les manuels de trigonométrie sphérique élémentaire.

Voici maintenant le texte de GIRARD. Sa lecture, me semble-t-il, ne peut plus guère présenter de difficulté.

« Quant au quadrangle spher. que le Sieur STEVIN dit n'avoir peu resoudre, en la fin du troisiesme livre de la Cosmogr. des triang. spher. en voicy la solution : la figure n'a qu'un angle incogneu, et iceluy comprins de deux lignes cogneües :

» Soit menée une diagonale de l'angle incogneu.

» Les angles opposites sont egaux ou non. Si egaux la diagonale divise l'angle du milieu (que j'appelleray ainsi par distinction) en deux telles parties que leurs sinus seront en mesme raison que les sinus des costez opposites donnez.

» Mais si les angles sont inegaux, je substitueray un costé en la place d'un des costez donnez ; voire de celuy que je mettrai au premier lieu en l'operation ceste reigle de trois : le sinus d'un costé cogneu me donne le sinus de l'angle opposite ; combien le sinus de l'autre angle ? Viendra le sinus d'un costé, que je substitue au lieu du susdit. Alors comme devant, l'angle du milieu sera divisé en deux angles par la diagonale, dont les sinus sont en mesme raison que les sinus des costez opposites qui les soustiennent. Or leur invention n'est en rien dissemblable à l'operation du troisiesme cas des triang. plans, où l'on cerche les 2 angles incogneus sans mener de perpendic. ».

Ici finit à proprement parler le Précis de Trigonometrie.

« Et pour remplir les pages qui, autrement seroyent vuides, je mettray les choses suivantes ».

Aucun titre ne pouvait être mieux choisi pour la collection de problèmes que forment ces « choses ». Nul ordre n'y règne. L'auteur n'a pas même pris la peine d'employer un algorithme unique dans l'écriture des équations. Ce qui est loin de vouloir dire, pourtant, que les exercices proposés sont peu dignes d'attention. On en jugera par les exemples que j'en extrais.

Le premier pourrait servir d'Introduction à deux bons articles sur la formule de SNELLIUS, attribuée souvent à tort à OZANAM (1), publiés jadis dans le présent recueil. L'un est des plumes de BROCARD et MANSION (2), l'autre de celle de M. LE PAIGE (3).

GIRARD vient de donner une table d'arcs de cercle dont la longueur est calculée en fonction du rayon. « L'usage de ces Tables est fort frequent, dit-il, aussi elles sont propres à pratiquer ce tres-beau probleme de l'invention de Monsiur W. SNELLIUS descrit en l'appendice de sa *Cyclometrie* (4), probleme 5, et icy reduit selon nostre stile ; qui est

(1) Fait l'objet d'un petit traité publié en 1699 sous le titre de *Nouvelle trigonométrie où l'on trouve le moyen de calculer toutes sortes de triangles rectilignes sans les tables des sinus et aussi par les tables des sinus avec une application de la trigonométrie à la mesure des lignes droites accessibles et inaccessibles* par M. OZANAM, professeur de mathématiques.

Je ne l'ai pas vu. Je donne le titre d'après l'article de M. BROCARD, qui suit.

(2) *La Trigonométrie réduite à une seule formule d'après* J. OZANAM, *professeur de Mathématiques*, par BROCARD, M, t. IX, 1889, pp. 161-164.

Ce premier article eut dans le même volume deux suites, par PAUL MANSION. *Sur la formule d'*OZANAM (pp. 181-183) et *Encore la formule d'*OZANAM (pp. 265-268).

(3) *La formule d'*OZANAM *est due à* W. SNELLIUS. *Extrait d'une lettre de* M. LE PAIGE *à* M. MANSION, M, t. X, 1890, pp. 34-36.

(4) WILLEBRORDI SNELLII R. F. *Cyclometricus*... Lugduni Batavorum, Ex officina Elzeviriana, 1621, pp. 95-97. (Bibl. Roy. de Belg.).

pour trouver les angles d'un triangle rectangle, les costez donnez, sans se servir des Tables de sinus. Lequel est tel.

» Soit H hypotenuse, B base et P perpend. pour le moindre costé ; lequel n'estant environ plus de la moitié de B, on pourra cognoistre l'angle jusques à $\frac{1}{4}$ minute. Car, tant plus petit est P à raison de B, tant plus precisement se trouvera l'angle.

» Donc, soit R le raid de 10000000 ou davantage. Alors $\frac{3PR}{H2 + B}$, $\left[= \frac{3PR}{2H + B}\right]$ sera la mesure de l'angle opposite à P, lequel se deffinira par ceste Table susdite. Or, par ceste invention on peut cognoistre un angle jusques à secondes, tierces et qartes, voire davantage si l'on veut. Ce qui ne se peut faire par les Tables des sinus communes.

$$\frac{3PR}{H2 + B} \text{ trop peu ;} \qquad \frac{\overset{2}{(B + H)}\,PR}{BH3} \text{ est trop.}$$

$$\left[\frac{3PR}{2H + B} < \text{l'angle} < \frac{(2B + H)\,PR}{3BH}\right].$$

» Mais j'aimerois mieux me servir du premier, car l'autre ne se met en œuvre que quand P à B est d'une raison fort petite. Le moyen est (1)

$$\frac{\overset{7}{(HB + \overbrace{H + B}^{\square})}\ in\ PR}{\underset{HB\ in\ (H + B)}{3 \quad 2}} \left[\frac{(7HB + H^2 + B^2)\,PR}{3HB\,(2H + B)}\right].$$

» Toutefois c'est aussi trop ».

Suit l'application de ces formules à un exemple numérique.

J'ai choisi un second exemple de préférence à d'autres parce que CHASLES a jadis appelé sur lui l'attention (2). En voici l'énoncé.

« Si un quadrangle est inscrit au cercle, on peut changer tellement la disposition des costez, qu'on trouvera 3 sortes de diagonales, le solide desquelles divisé par le double du diametre du cercle, le quotient sera la superfice dudit quadrangle ».

(1) GIRARD écrit par erreur 5PH, faute signalée par M. LE PAIGE, dans l'article cité.

(2) *Aperçu historique*, pp. 440 et 546.

Soient a, b, c, d, les côtés d'un quadrilatère $abcd$. GIRARD commence par dire, que si $abcd$ est inscriptible à un cercle de rayon R, en donnant une autre disposition aux côtés, on sait former deux nouveaux quadrilatères $acbd$, $adbc$ inscriptibles au même cercle ; et que les trois quadrilatères ont, deux à deux, une même diagonale. C'est bien ainsi que CHASLES le comprend. La proposition est d'ailleurs intuitive pour peu qu'on prenne la peine de dessiner la figure. Soient d_1, d_2, d_3, les trois diagonales.

GIRARD suppose implicitement que ces trois quadrilatères ont la même surface, ce qui au premier moment pouvait, peut-être paraître moins clair à ses lecteurs ; car cédant de nouveau à un défaut de méthode déjà signalé, il ne donne que plus loin la formule qui exprime la surface d'un quadrilatère inscriptible en fonction des côtés

$$s = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}, \tag{1}$$

(formule qui rend elle aussi intuitive l'égalité des surfaces des trois quadrilatères) :

« La racine du produict des 4 differences de chacun costé et du demicircuit d'un quadrangle dans le cercle, sera pour la superfice d'iceluy ».

Reste la dernière partie du théorème, qui peut se formuler :

$$s = \frac{d_1 d_2 d_3}{4R}. \tag{2}$$

BRAHMAGUPTA, vieil algébriste indien du VIIe siècle de notre ère, avait donné la formule (1). Il avait donné aussi

$$R = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}. \tag{3}$$

Mais GIRARD ne connaissait pas l'*Algèbre* de BRAHMAGUPTA et ne pouvait la connaître ; car elle ne fut communiquée aux Géomètres de l'Occident que deux siècles plus tard, en 1817 [1]. Admettons néanmoins,

[1] H. TH. COLEBROOKE. *Algebra with Arithmetik and Mensuration from the Sanscrit of* BRAHMAGUPTA *aud* BRASKARA. London, 1817.
Je n'ai pas vu cette traduction, mais dans son *Aperçu historique* CHASLES lui a consacré une étude, qui est l'une des meilleures que l'historien français ait donnée en cet immortel ouvrage (pp. 220-247).
Un détail bibliographique y a parfois embarrassé. CHASLES dit que dans son commentaire sur la première proposition du livre *De problematibus miscellaneis* de LUDOLPHE VAN CEULEN, SNELLIUS s'attribue la découverte de la formule qui exprime la surface du quadrilatère inscriptible en fonction des côtés. Il ne s'agit pas là d'un ouvrage séparé, mais du *Lib.* IV *de ses Fvndamenta arithmetica et geometrica* .... Lugduni Batavorum, apud Instum a Colster et Jacobum Marci.

qu'indépendamment de BRAHMAGUPTA, il disposait de (3) — ce qui est possible, sans être cependant prouvé, je me hâte de le dire — il était assez maître du calcul algébrique pour établir (2) comme suit :

Le numérateur de (3) lui suggérait l'idée d'appliquer aux trois quadrilatères inscriptibles, le théorème du rectangle des diagonales qui se lisait dans l'*Almageste* de PTOLÉMÉE, et de multiplier membre à membre les résultats obtenus. D'où

$$d_1^2 d_1^2 d_3^2 = (ab+cd)(ac+bd)(ad+bc). \tag{4}$$

Il suffisait ensuite de remplacer le numérateur de (3) par sa valeur tirée de (4), de résoudre le résultat obtenu par rapport au radical qu'il contenait et d'en porter la valeur dans (1).

En 1626, pareil calcul n'eut fait aucune difficulté à DESCARTES. Il n'était pas davantage au-dessus des moyens de GIRARD.

Terminons, ce trop long article en transcrivant un dernier énoncé.

« Si au quadrangle inscrit au cercle est menée une seule diagonale, alors comme 2 fois le diam. à la diagonale, ainsi le rectangle de chaque deux costez non séparez, à la superfice dudit quadrang. » [1].

En d'autres termes, soient de nouveau a, b, c, d, les côtés consécutifs d'un quadrilatère inscriptible ; d_1, d_2, ses diagonales ; s sa surface ; R le rayon du cercle circonscrit

$$\frac{4R}{d_1} = \frac{ab+cd}{s} \quad \text{et} \quad \frac{4R}{d_2} = \frac{bc+da}{s}.$$

GIRARD oublie de remarquer qu'une simple division lui eut donné l'important rapport des diagonales en fonction des côtés.

La découverte de ce rapport étant souvent erronément attribuée à PTOLÉMÉE, PAUL TANNERY fit un jour observer dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* [2] qu'elle devait être postérieure à VIÈTE. Il donnait la raison de son opinion, mais ne put préciser davantage la date.

En attendant qu'on nous ait appris le nom de celui qui le premier énonça explicitement la formule classique du rapport, nous dirons qu'elle n'est qu'un corollaire immédiat du théorème d'ALBERT GIRARD.

---

[1] GIRARD établissait probablement la formule, comme le fait encore par exemple BLANCHET, dans la dernière proposition du livre III de ses *Eléments*. En effet, le *De Triangulis* de REGIO MONTE était entre toutes les mains, et dans la prop. XXIV du liv. II, l'auteur résolvait le problème suivant : « Trouver le rayon du cercle circonscrit à un triangle dont on connaît les trois côtés ». *Doctissimi viri et mathematicarum eximii professoris* IOANNIS DE REGIO MONTE *de Triangulis omnimodis libri quinque*.... Norimbergae, in aedibus Io. Petri. Anno Christi M.D.XXXIII, p. 56 (Bibl. Roy. de Belg.).

[2] I. M. t. VII, 1900, p. 323, rép. à la quest. 1719.

Mathesis 39 (8), 1925

diamètre fixe Ox au point K ; soit M′ le symétrique de M par rapport à K. Pour trouver la tangente en M′ à la trajectoire de ce point, cherchons le point de rencontre du rayon OM avec la perpendiculaire à Ox en K, et prenons sur OM le segment $\overline{ON'} = 2ON$; la droite M′N′ est alors la normale en M′ au lieu géométrique de ce point.

LUDOLPHE VAN CEULEN (1540-1610),

par M. H. Bosmans, S. J.

Ludolphe Van Ceulen [1] naquit à Hildesheim, en Hanovre, le 28 janvier 1540, et mourut à Leyde, le 31 décembre 1610. Ses cendres reposent en l'église Saint-Pierre de la ville hollandaise. Les ouvrages de notre géomètre sont pour la plupart signés *Van Ceulen*. Mais dans le fond du portrait que je reproduis [2], l'artiste à gravé *Ludolff Van Collen*. On rencontre aussi les orthographes Van Colen et Van Cölen ; à la fin du XVIe siècle, on n'y regardait pas de si près et les anomalies de ce genre n'étaient pas rares.

---

[1] Au point de vue biographique et bibliographique, le travail le plus complet que je connaisse sur Van Ceulen est celui que D. Bierens de Haan a donné aux chapitres VII, IX et XVI de ses *Matériaux pour l'histoire des sciences mathématiques et naturelles en Hollande* (*Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden*), publié dans les collections de l'Académie d'Amsterdam. (*Verslagen en Mededeelingen der koninklijke Akademie van Wetenschappen.* Afdeeling natuurkunde. Amsterdam, 2e ser., t. IX, 1876, pp. 322-369 ; t. X, 1876, pp. 161-178, t. XII, 1878, pp. 118-126). M. Neuberg en a rendu un compte détaillé dans la *Nouv. Corr. Math.*, (t. IV, 1878, pp. 386-390 et t. V, 1879, pp. 14-18).

Bierens de Haan avait déjà donné antérieurement des pages importantes écrites en français sur Van Ceulen considéré comme calculateur de π, dans sa *Notice sur quelques quadrateurs du cercle dans les Pays-Bas* (*Bullettino di Bibliografia e di storia delle Scienze matematiche e fisiche* de Boncompagni, t. VII, Rome, 1874, pp. 105-118).

A signaler encore dans le même recueil la *Notice sur Ludolph Van Ceulen* publiée par G.-A. Vorsterman van Oijen, avec des notes du prince Boncompagni (t. I, 1868, pp. 140-156).

[2] C'est celui qui occupe à peu près la moitié de la page-titre du *Lvdolphi à Cevlen, De Circvlo et Adscriptis Liber. In quo... Omnia è*