 Ann. Soc. Scient. Brux (25) 1901

Les égalités (104) et (106bis) donnent (*)

$$(109)\quad \begin{cases} 4\pi\,(K_2E' - E) = (K_1 - K_2)\,\dfrac{\delta\Psi}{\delta N_1}, \\[2ex] 4\pi\,(K_1E' - E) = (K_2 - K_1)\,\dfrac{\delta\Psi}{\delta N_2}. \end{cases}$$

Ce serait ici, semble-t-il, le lieu de juger cette électrostatique de Maxwell et de voir si elle peut s'accorder avec les lois connues; mais un élément nous manque pour mener à bien cette discussion; cet élément, c'est la notion de *flux de déplacement,* qui appartient à l'électrodynamique.

(*) Ces égalités (109) sont, dans toutes les éditions du *Traité* de Maxwell, remplacées par des égalités erronées. En la traduction française, le terme K e' de l'égalité (108) est remplacé par e'; cette erreur ne se trouve pas dans la première édition anglaise.

LE TRAITÉ DES SINUS

DE

Michiel COIGNET

PUBLIÉ PAR

le R. P. Henri BOSMANS

de la Compagnie de Jésus

Introduction

I

Coignet (1) naquit à Anvers en 1549 et y mourut le 24 décembre 1623. Il fut mathématicien et ingénieur en titre des archiducs Albert et Isabelle, et semble avoir occupé à leur cour une position analogue à celle que Simon Stevin remplissait à la même époque à la cour de Maurice de Nassau. En tant qu'ingénieur des archiducs, il prend part aux sièges de Hulst et d'Ostende; comme leur mathématicien, il donne des leçons de mathématiques aux principaux officiers de leur armée et mérite même, à la fin de sa vie, une pension pour ce dernier genre de service. Nous le voyons en relation avec les savants les plus éminents de son temps. Quetelet a fait connaître le jugement qu'Adrien Romain portait sur lui (2).

" Michel Coignet, dit ce dernier, est très versé dans toutes les
„ parties des mathématiques. C'est ce que prouvent et ce que prou-
„ veront tant ses ouvrages imprimés en diverses langues, que ceux
„ qu'il a en manuscrits, sur l'arithmétique, la géométrie, la stéréo-
„ métrie, la géodésie et l'astronomie; ouvrages remplis d'un savoir
„ singulier qu'il a bien voulu me montrer quand j'allais le visiter à

„ Anvers. Je passe sous silence ses belles mécaniques, qui font
„ l'admiration des connaisseurs. Je ne dis rien non plus des
„ diverses horloges qu'il a construites pour la ville d'Anvers,
„ d'après une théorie exposée dans un traité exprès. J'ajouterai
„ seulement, qu'il s'occupe avec ardeur de la recherche des
„ mobiles secondaires, et que bientôt il présentera de nouveaux
„ principes sur cette partie de la mécanique. „

Viète semble avoir partagé avec le professeur de Louvain l'estime que celui-ci avait pour Coignet.

Dans la première édition de sa *De numerosa potestatum ad exegesim resolutione* (3), il publie en guise de recommandation et de postface, un curieux document que Schooten n'a pas reproduit dans son édition des œuvres de Viète (4). C'est une lettre de Marin Ghetaldi, écrite de Paris à Coignet le 15 février 1600; lettre avant tout élogieuse pour Viète, mais pleine de respect pour le savant auquel elle est adressée.

Parmi ses œuvres déjà publiées (5) l'une est remarquable pour l'époque où elle parut. C'est l'*Instruction nouvelle des points plus excellents et nécessaires touchant l'art de naviguer* (6). Aussi c'est elle que l'on cite toujours quand on parle de Coignet. L'auteur nous y apparaît avec la marque caractéristique de son talent. C'est un esprit lucide et d'un clair bon sens; saisissant du premier coup ce qu'il y a d'original et de pratique dans les découvertes des autres; dissipant les nuages qui souvent les enveloppent encore dans l'esprit de leurs premiers inventeurs et en mettant en pleine lumière le côté utile. C'est *l'Instruction nouvelle des points plus excellents et nécessaires touchant l'art de naviguer,* qui a vulgarisé la méthode inventée par Gemma Frisius pour déterminer les longitudes en mer par le moyen des horloges (7).

On peut faire deux groupes des autres ouvrages de Coignet.

Le premier comprend quelques petites arithmétiques, purement pratiques, œuvre de jeunesse destinée à l'enseignement des écoles (8); le second, deux ou trois éditions d'un *Epitome theatri orbis terrarum d'Ortelius* (9), parfaitement oubliées aujourd'hui dans la foule des ouvrages de ce genre, et une introduction mathématique au *Speculum Orbis terrarum* de de Jode (10).

Cependant c'est à sa science que Coignet dut sa grande réputation. S'il nous est inconnu aujourd'hui c'est que ses principaux

travaux n'ont jamais vu le jour. Pure fatalité! Car nous voyons, par exemple, l'archiduchesse Isabelle s'intéresser aux œuvres de son ingénieur et lui accorder un subside de 600 livres " pour aulcune-
„ ment convenir aux dépens que lui conviendroit supporter à faire
„ tailler les figures nécessaires auxdicts oeuvres à charge toutefois
„ qu'il donneroit promesse de faire mectre en lumière des dictes
„ oeuvres (11). „

Les malheurs des temps, les troubles qui agitaient les Pays-Bas, d'autres causes peut-être aujourd'hui inconnues, empêchèrent l'exécution des vues de la Princesse. Les œuvres de Coignet ne parurent pas, et au siècle dernier, Foppens constatait avec regret " qu'elles attendaient encore en vain leur Mécène (12) „.

Que sont-elles devenues à l'heure actuelle? Où trouver, par exemple, ce traité des horloges, qu'Adrien Romain avait vu à Anvers et qu'il admirait tant? Où chercher ces écrits " remplis d'un savoir singulier „ sur l'arithmétique, la géométrie, la géodésie, l'astronomie? Peut-être dans les fonds poudreux de quelque bibliothèque; mais il est fort à craindre, qu'ils ne soient définitivement perdus.

J'ai eu cependant la bonne fortune de trouver un fragment des travaux inédits de Coignet à la Bibliothèque royale de Belgique. C'est ce manuscrit, que je voudrais faire connaître.

Il est coté II 769, et se présente sous l'aspect d'un beau et grand volume de 124 pages, écrit sur fort papier de 31 centimètres de hauteur sur 25 de largeur. Ce n'est pas un autographe de l'auteur, mais une copie d'une écriture magnifique, calligraphiée à l'encre noire avec quelques lettres et ornements à l'encre rouge. Cette copie est d'une même main, mais on s'aperçoit aisément qu'elle n'a cependant pas été faite d'un seul jet. On a évidemment réuni des traités divers, qu'on a reliés ensemble, comme étant l'œuvre d'un même auteur.

Voici la description détaillée de ce que ce manuscrit renferme :

Le f° 1 est formé d'une demi-feuille dont la deuxième moitié est collée à la couverture. Le v° en est blanc; le r° contient le titre suivant :

" Traicté du present Liure
„ Premierement se traicte comment lon doibt suputer et calculer
„ les Tables de Sinus, Tangentes et Secantes ettc^a.

„ Secondement se traicte des Triangles plans, par lesquels tant „ en la planimetrie quen l'Altimetrie lon Void lusaige desdittes „ Tables.

„ Tiercement est l'usaige des 12 diuisions marquez sur la „ Reigle platte (apellee Pantometre) Par lesquels lon resoult tous „ Problemes Mathematiq; : ettc^a^.

„ Le tout donné au Capitaine Thomas francquin quartier mre „ gnrl ([13]) des Armees de sa Ma^te^ et de leurs Altezes Sers^mes^ es „ Paijs bas par Monsieur Michiel coignet Mathematicien de leurs „ dites Altezes. 1612 „.

Le bas de la page est orné d'un fleuron.

Les ff° 2r°-13v° sont groupés en trois cahiers de deux feuilles et contiennent le " Traicté des Sinus. „

Les ff° 14r°-16v°, composés d'une feuille entière, et d'une demi-feuille collée par un talon, renferment les tables des sinus, des tangentes et des sécantes. Ces lignes sont calculées pour le rayon 100 000 de 20 minutes en 20 minutes et pour tous les degrés du premier quadrant.

Une demi-feuille, collée par un talon aux feuilles qui précèdent, forme le f° 17 ; le v° en est blanc, le r° contient le titre du second opuscule : " Traicté des Triangles plans ou rectilignes par Monsieur „ Michiel Coignet, Mathematicien et Ingeniaire de Sa Ma^te^ et de „ leur Altezes Sere^mes^ ettc^a^. „ Le bas de la page est orné d'une couronne. Les ff° 18r°-29v°, groupés de nouveau en trois cahiers de deux feuilles, contiennent le corps de cet ouvrage.

Les ff° 30r°-37v°, formant aussi deux cahiers de deux feuilles, renferment divers sujets, qui ne se rapportent directement ni à ce qui précède, ni à ce qui suit. Ils semblent n'avoir été placés ici que parce qu'ils sont l'œuvre de Coignet. Voici l'énumération des questions qui y sont résolues :

FF° 30v°-31r° : Calcul des côtés des polygones réguliers de 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12 côtés. Le f° 30r° est blanc.

FF° 31v°-35r° : Divers problèmes sur le tracé des fortifications.

FF° 35v°-36r° : Un problème de gnomonique, " Trouver sur vn „ horloge Vertical declinant angle que faict la ligne du stilus „ auecq; la ligne du midij et aussij combien sera l'eleuation du „ stile dessus la ligne. „

Les ff^os^ 36v° et 37 sont blancs.

Le f° 38r° contient le titre du troisième traité :

" Vsvs Duodecim Diuisionum geometricarum per quas (et ope „ Vnius circini Vulgaris) fere omnia Mathematicorum Problemata „ facili negotio resoluuntur. „

" Opera et studio Michaëlis Coigneti Antuerpiani Seren^m^. Belgij „ Principum Mathematici, ex ipsa numerorum occulta parte (que „ Algebra vulgo dicitur,) maxima ex parte excogitata ettc^a^. „

" 1610. „ ([14])

Malgré ce titre latin, l'ouvrage est, comme les précédents, écrit en français.

Le bas du f° 38r° est orné d'un cartouche.

Les ff^os^ 38v° et 39, contiennent la table des propositions.

Les ff^os^ 40-62, groupés en six cahiers, chacun de deux feuilles, renferment le corps de l'ouvrage ; mais le f° 62v° est blanc. Au r° du f° 40, on voit, vers le haut, un cartouche gracieusement encadré. Au-dessous se trouve le dessin du pantomètre, règle plate de 197 millimètres sur 46, portant six graduations sur chacune de ses faces.

Une question préliminaire se présente tout d'abord ici. Le manuscrit, que nous venons de décrire est-il le même, que celui qui est indiqué en ces termes, au tome V de la Bibliotheca Belgica par le bibliothécaire en chef et les conservateurs de la Bibliothèque de l'Université de Gand ? ([15])

" Dans la vente J. Camberlyn (Bruxelles, 1882, n° 477) figurait : „ Coignet (Michel) d'Anvers, Calcul des sinus, tangentes, sécantes, „ etc. — Des triangles plans, etc. — De l'usage du pantomètre „ 1610-1612, in-fol. orné de nombreuses figures de géométrie et „ culs-de-lampes dessinés avec goût. " Le tout donné au capitaine „ Thomas Francquin, quartier maître général des armées de „ S. M. et de LL. AA. SS. ès Pays-Bas, par Michel Coignet, mathé- „ maticien et ingénieur de S. M. et de LL. AA. SS. etc. » Infol. „ Ce manuscrit fut adjugé au prix de 13 francs. „

L'identité des deux manuscrits me paraît probable, pour ne pas dire certaine. Il me reste cependant un doute, que je n'ai pu lever par un renseignement positif. Ce n'est pas dans la vente Camberlyn, que la Bibliothèque royale a acquis le manuscrit II, 769 ; mais quatre ans plus tard, en 1886, dans la vente De Decker, qui eut lieu à Anvers.

Pour faire revivre Coignet, le tirer de l'oubli, faire connaître son style, sa manière, sa méthode, montrer que la Belgique possédait en lui un savant peu connu, dont elle pouvait à bon droit être fière, il était indispensable de publier en entier au moins un des petits opuscules, que le manuscrit de la Bibliothèque royale de Belgique nous a conservés. J'ai choisi le premier et le plus court : " Le Traicté des Sinus. „ Je donne un résumé des autres.

II

Dans le " Traicté des Triangles plans „, Coignet débute par des " sentences comunes ou axiomes demonstrez aux liures des Elementz d'Euclide „ et des définitions; puis il énonce ce qu'il nomme " le probleme general pour les Triangles rectilignes.

" En tout triangle rectiligne la proportion qu'il ij a des costez
„ lung a lautre, la mesme ij a il des sinus des angles oppositz
„ ausdictz costez, cest a dire que les costez dun triangle ont
„ proportion lung a lautre comme le sinus des angles oppositz
„ ausditz costez. „

C'est la loi du sinus

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

qui se rencontre dans toutes les trigonométries de l'époque. A ce point de vue sa présence à cette place n'offre rien de remarquable. Ce qui l'est davantage, c'est le procédé par lequel Coignet établit cette loi. Il n'emploie pas l'antique démonstration de Regiomontan ([16]) alors encore classique chez presque tous les auteurs, mais il lui substitue la jolie preuve, que Snellius ([17]) devait rendre si populaire quinze ans plus tard et que Moritz Cantor attribue encore aujourd'hui au géomètre hollandais ([18]).

Je croyais pouvoir revendiquer en faveur de Coignet l'honneur de la découverte. J'ai bientôt dû reconnaître que j'avais tort. Coignet n'est ni le seul ni surtout le premier qui ait donné la démonstration dont se sert Snellius. Je la trouve en 1596, dans l'*Opus Palatinum de Triangulis* de Rheticus ([19]); en 1588, dans le *Fundamentum astronomicum* de Raymarus Ursus Dithmarsus ([20]);

et enfin en 1579, dans le *Canon mathematicus* de Viète ([21]). C'est ce dernier qui en est l'auteur.

Le lecteur le sait, la démonstration dite de Snellius est plus simple que celle de Regiomontan ([22]). Ce progrès ne pouvait échapper à l'esprit éminemment clair de Coignet.

Après le problème général, nous arrivons au corps de l'ouvrage divisé en cinq articles. Les trois premiers sont courts et ne présentent rien de très saillant. Je me contente d'en donner les titres sous une forme moderne.

Article I. Résolution des triangles rectangles dont on connaît un des côtés et un angle aigu.

Article II. Résolution des triangles rectangles dont on connaît deux des côtés.

Article III. Étant donné un triangle obliquangle, dont on connaît les trois angles, trouver la proportion des côtés.

Vient ensuite l'article IV : " Si les trois costez sont donnez, lon
„ donnera les trois angles, et si le triangle est equilateral, il est
„ certain que chacun angle fait 60 degrez.

„ Si le triangle est Issoscele, Tirez du Somet vne perpendiculaire
„ vers la base, qui la partira en deux parties egalles, et par conse-
„ quent sera le dict triangle Issoscele, coupé en deux triangles
„ rectangles dont les Hijpothenuses seront cognues auecq les
„ bases; ergo par le precedent 2e article des Triangles rectangles,
„ et laijde des tables de Sinus aurez les angles. „

Un seul cas mérite donc examen, celui du triangle scalène,

Lorsque nous devons le résoudre aujourd'hui, nous employons des deux formules :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \frac{r}{p-a} \qquad r = \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{p}}.$$

Elles ont, très vraisemblablement, été connues de Coignet, car au mode d'écriture près, Rheticus les donne sous cette forme toute moderne dans l'*Opus Palatinum de triangulis* ([23]). Ces formules nous paraissent, à juste titre, les plus simples; mais il n'en est ainsi, que parce que nous possédons des tables de logarithmes. Pour les anciens qui en étaient privés, la difficulté se déplaçait et ils employaient, à la détermination des angles d'un triangle dont on connaît les côtés, une méthode à leur point de vue plus expéditive.

Elle consistait essentiellement à mener une des hauteurs du triangle proposé et à le diviser ainsi en une somme de deux triangles rectangles. Pour être certain, que le pied H de la hauteur tomberait sur le côté lui-même et non pas sur son prolongement, il leur suffisait d'avoir soin de choisir la hauteur abaissée de l'angle opposé au plus grand côté. Coignet ne manque pas d'en faire la remarque. Soit BC ce côté et A le sommet de l'angle opposé. On calculait les deux segments BH, HC déterminés sur BC par le pied H de la hauteur de l'angle A.

Ce calcul se faisait de plusieurs manières.

Regiomontan ([24]), pour ne nommer que lui, prenait pour point de départ la formule d'Euclide ([25])

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a.\ \mathrm{HB}$$

et en déduisait aisément :

$$\mathrm{HB} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

Mais il s'apercevait bientôt, par des considérations géométriques assez compliquées, qu'il pouvait simplifier la mise en nombres en écrivant la valeur HB sous la forme ([26])

$$\mathrm{HB} = \frac{1}{2}a - \frac{(b+c)(b-c)}{2a}.$$

C'est cette dernière expression que Coignet adopte. Il l'énonce en ces termes :

" Come la base se tiendra à la somme des deux jambes, ainsij
„ se tiendra la différence des jambes à la portion de la base qu'on
„ otera d'icelle, dont la moitié monstrera la moindre portion
„ d'icelle base „.

Nous dirions aujourd'hui

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b-c}{a - 2.\ \mathrm{HB}}.$$

J'arrive à l'article V : Résoudre un triangle dont on connaît deux côtés et un angle

Il y a naturellement ici deux cas à considérer, suivant que l'angle donné est compris entre les côtés connus, ou qu'il est opposé à l'un d'eux.

Et d'abord " Si dung Triangle est donné langle du somet auecq;
„ les deux Jambes, Comment on trouvera ses autres deux angles
„ de la base et aussy la base du 3e costé „.

Coignet donne deux solutions du problème.

La première est une méthode ancienne. Elle consistait à abaisser la hauteur d'un des deux angles inconnus et à décomposer ainsi le triangle proposé en deux triangles rectangles, qu'on calculait sans peine.

Dans la seconde, il détermine la différence des angles inconnus, par la formule ([27])

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)};$$

il obtient ensuite par la loi du sinus le dernier côté.

En second lieu " Si dung triangle les 2 costez sont donnez auecq
„ vn angle oposite a lung des costez donne, trouuer la reste ... Il
„ est a notter, que ceste proposition est doubteuse si ce nest
„ scachant de quelle nature est lautre angle, qui est oposite a
„ lautre coste donné ([28]) „.

Cette remarque faite, il résout le triangle par la loi du sinus, comme nous le faisons encore aujourd'hui.

Tous ces théorèmes et leurs démonstrations sont énoncés au long, sans aucun emploi de notations algébriques ou trigonométriques ([29]).

Telle est la partie théorique du " Traicté du triangle plan „.

L'ouvrage s'achève par l'exposé des applications pratiques à effectuer sur le terrain. Cette partie est intitulée " de lusage des Triangles Rectilignes Tant en L'Altimetrie quen la plainimetrie „. Nous y trouvons résolus les problèmes suivants :

Trouver la hauteur d'une tour dont le pied est accessible.

Évaluer la surface d'un terrain de forme polygonale.

Trouver la hauteur d'une tour dont le pied n'est pas accessible.

Un " mesureur „ est dans une tour où il peut monter et descendre. Du haut de la tour et d'une " fenestre „ il voit un même objet. On demande comment il trouvera la distance de cet objet au pied de la tour.

Évaluer la surface d'un terrain de forme polygonale et dont il

est impossible de mesurer les angles des diagonales avec les côtés.

Mesurer la distance d'une tour inaccessible.

Planter un fort sans instruments (il s'agit de construire un pentagone régulier sur le terrain).

Les solutions de Coignet sont toutes simples et élégantes. On les trouve encore aujourd'hui dans nos *Cours d'Arpentage.*

Le traité des triangles s'arrête ici.

J'ai suffisamment indiqué, en décrivant ci-dessus le manuscrit de Coignet, quel était le contenu des folios 30-35.

Le traité du Pantomètre est un recueil de problèmes de géométrie. Les solutions ne s'y obtiennent pas d'ordinaire, comme nous l'entendons aujourd'hui, par l'usage exclusif de la règle vulgaire et du compas; mais l'auteur y emploie un compas et une règle graduée, permettant de résoudre des problèmes de genres assez divers.

C'est cette règle graduée qu'il appelle Pantomètre ([30]).

Les échelles ou graduations différentes du Pantomètre, sont au nombre de douze et ne paraissent pas toutes également utiles. Nous y trouvons entre autres : une simple division de l'unité de longueur en parties égales; la longueur des degrés de la circonférence évalués en fonction du rayon; celle des côtés des polygones réguliers en fonction du rayon de la circonférence circonscrite; une échelle donnant la longueur des sinus; une autre donnant celle des tangentes; une autre encore exprimant le rapport des poids spécifiques des principaux métaux : or, argent, fer, plomb, cuivre, étain, etc., etc.

Quelques problèmes conduisent à une construction purement géométrique, qui est alors le but même qu'on s'y propose. D'autres donnent un résultat numérique et, toutes réserves faites, l'utilité du Pantomètre est en ce cas quelque peu comparable à celle de nos abaques.

Les problèmes proposés sont au nombre de 46.

III

J'ai dit au commencement de cette étude que le manuscrit de Coignet était splendidement calligraphié. Le soin apporté au tracé des figures, l'ordre qui règne dans la disposition des calculs con-

tribuent singulièrement à en rendre la lecture facile et agréable. Nulle part cette lecture ne peut être douteuse. Je reproduis donc fidèlement le texte en en respectant l'orthographe. J'aurais voulu en conserver aussi les abréviations, mais les exigences de la typographie m'ont mis dans l'impossibilité de le faire; j'indique en note comment j'ai tâché d'y suppléer ([31]).

Quant à la ponctuation, le copiste de Coignet emploie indifféremment et sans règle le point ou la virgule; parfois aussi il se sert d'un signe intermédiaire qu'on peut prendre à volonté pour l'un ou pour l'autre. Je me suis surtout laissé guider par le sens de la phrase pour déterminer mon choix.

Je dois en outre un mot d'explication au lecteur au sujet des notes que je consacre dans mon travail à divers points de l'histoire de la trigonométrie.

Je me suis imposé des règles pour les écrire.

Lorsqu'il s'agissait des Savants arabes j'ai bien été obligé de recourir aux traductions et aux commentaires, mais je me suis fait une loi d'étudier les mathématiciens de l'antiquité classique, du moyen âge et de la renaissance, dans leurs œuvres originales chaque fois que la chose m'a été possible. J'ai eu en main tous les auteurs et toutes les éditions que je cite, à moins que je ne dise le contraire en termes exprès. J'ai eu recours pour les géomètres grecs aux excellentes éditions données par la maison Teubner de Leipzig ([32]). Quant aux géomètres du moyen âge et de la renaissance leurs ouvrages sont presque toujours devenus des raretés bibliographiques. La Bibliothèque royale de Belgique, si riche en éditions anciennes, m'a été ici du plus précieux secours. J'ai dû néanmoins recourir assez souvent en outre à d'autres dépôts publics; ainsi j'ai consulté fréquemment les Bibliothèques de l'Observatoire royal et celles des Universités de Louvain, de Liége et de Gand. J'indique d'ailleurs, chaque fois qu'il s'agit d'éditions anciennes, à quelle Bibliothèque appartient l'exemplaire dont je me suis servi.

Bruxelles, Collège Saint-Michel, 27 juin 1900.

NOTES DE L'INTRODUCTION

(1) J'emprunte les détails biographiques qui suivent, à deux articles de Pinchart intitulés : *Archives des Arts, des Sciences et des Lettres* et publiés dans le MESSAGER DES SCIENCES HISTORIQUES (§ 37, Gand, 1856, pp. 187-189 ; § 79, Gand, 1862, pp. 330-332).

La date de la naissance et de la mort de Coignet nous est connue d'une manière certaine par Foppens, qui nous a conservé l'épitaphe de Coignet, dans sa BIBLIOTHECA BELGICA et qui nous y apprend, qu'on la lisait encore de son temps, à l'église Saint-Jacques, à Anvers (t. II, Bruxellis, M.D.CC.XXXIX, pp. 890-891).

L'orthographe du nom de Coignet varie beaucoup. On trouve les formes suivantes : Coignet, Coingnet, Coigniet, Congnet, Cognetus, Cogniet, Cuignet, Coignetus et Quinet. Dans notre manuscrit, il orthographie toujours son nom, Coignet, ou s'il ajoute son prénom, Michiel Coignet; excepté cependant au titre du traité du Pantomètre ou il l'écrit, Michael Coignetus.

(2) *Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges*, Bruxelles, 1864, p. 124.— Le passage d'Adrien Romain, cité par Quetelet, est emprunté à la préface des *Ideae mathematicae pars prima, sive methodus polygonorum qua laterum perimetrorum et arearum cuiuscunque polygoni investigandorum ratio exactissima et certissima una cum circuli quadratura continentur. Authore Adriano Romano Lovaniensi, medico et mathematico.* Lovanii, apud Ioannem Masium, typog. iur. Anno CIↃ.IↃ.XIII. In-4°, p. 10 non ch. Bibl. roy. de Belg. V. 4973.

(3) Paris, David Le Clerc, 1600. In-fol. Bibl. roy. de Belg. V. 4908.

La lettre de Ghetaldi est écrite en italien et se trouve au verso du fol. 36.

(4) *Francisci Vietae Opera mathematica in unum volumen congesta ac recognita, opera et studio Francisci a Schooten Leydensis, Matheseos professoris.* Lugduni Batavorum, Ex Officina Bonaventurae et Abrahami Elzeviriorum. CIↃ.IↃ.CXLVI. In-fol. Bibl. roy. de Belg. V. 4819.

(5) La bibliographie des œuvres de Coignet a été donnée, avec le soin qui caractérise cet ouvrage, dans la BIBLIOTHECA BELGICA, *Bibliographie générale des Pays-Bas*, par le bibliothécaire en chef et les conservateurs de la Bibliothèque de l'Université de Gand (1re série, Gand, Camille Vyt, La Haye, Martin Nyhoff, 1880-1890). Elle se trouve un peu éparpillée de côtés divers et doit être cherchée aux mots : Coignet (t. V, C. 305-C. 310), Medina (t. XX, M. 187-M. 190), Menher (t. XX, M. 184), Raets (t. XXI, R. 60 et R. 61).

Dans son étude sur l'*Ecole cartographique belge, au XVIe siècle* (REV. DES QUEST. SCIENT., t. XLII, 1897, p. 266), M. F. Van Ortroy signale en outre au nombre des œuvres de Coignet, les introductions mathématiques qui figurent dans l'édition de 1593 du *Speculum* de de Jode et dans l'édition italienne de 1612 du *Theatrum* d'Ortelius.

Enfin dans une lettre privée qu'il m'a écrite à ce sujet, le savant professeur de l'Université de Gand, a eu l'obligeance de me faire connaître, qu'il existait aux archives communales de la ville d'Anvers (carton 26), un plan manuscrit de la partie de l'enceinte de cette ville comprise entre le Cattenberghe et la Porte Rouge. " Delineavit Antverpa Michael Coignetus Serm Principum Mathematicus anno... 1618. "

(6) Publié à Anvers, en 1581, chez Henry Hendrix. In-4°. Bibl. roy. de Belg. II. 47328.

Cet ouvrage est la traduction française revue et considérablement augmentée de la deuxième partie du traité : *De Zeeuaert Oft Conste van ter Zee te varen, vanden Excellente Pilote Mter Peeter de Medina, Spaignaert... Wt den Spaensche ende Fransoysche in onse Nederduytsche tale ouergheset ende met Annotatiê verciert bij Mr Merten Eueraert Brug. Met noch een ander nieuw Onderwijsinghe, op de principaelste puncten der Navigatien, van Michiel Coignet.* T'Hantwerpen, bij Hendrick Hendricksen, ... 1580. In-4°. Bibl. roy. de Belg. II. 26080.

Voyez la description détaillée de ces ouvrages, dans la BIBLIOTHECA BELGICA, par le bibliothécaire en chef de l'Université de Gand, aux mots : Coignet (t. V. C. 306) et Medina (t. XX, M. 187-M. 190).

(7) Voyez sur ce sujet l'*Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges*, de Quetelet (p. 82), et la *Cosmographia, siue Descriptio vniuersi Orbis, Petri Apiani et Gemmae Frisii, Mathematicorum insignium, iam demum integritati suae restituta. Adiecti sunt alii, tum Gemmae Frisii, tum aliorum Auctorum eius argumenti Tractatus ac Libelli varii, quarum seriem versa pagina demonstrat.* Anno 1584. Antuerpiae, ex Officinâ Ioannis Withagii. In-4°. (p. 239). Bibl. roy. de Belg., V. H. 8236. Cet ouvrage peut être considéré comme l'édition complète des œuvres de Gemma Frisius. Quant à sa méthode des longitudes, elle y fait l'objet du 19e chapitre du petit traité *De Usu Globi*, p. 239. Ce chapitre est intitulé : " De novo modo inveniendi longitudinem. " La première édition du *De usu globi* est d'Anvers 1530 ; elle parut dans un ouvrage de l'auteur intitulé *De Principiis Astronomiae & Cosmographiae.* Bibl. de l'Université de Gand. Acc. 8546 1. Dans cette édition la méthode des longitudes est exposée au ch. 18, f° D_2 v° - (D_3) r°.

(8) Ces arithmétiques ont été décrites dans la BIBLIOTHECA BELGICA par le bibliothécaire en chef de l'Université de Gand (t. V, Coignet, C. 305 ; t. XX, Menher M. 184 ; t. XXI, Raets, 60, R. 61).

Au point de vue des mathématiques pures, nous l'avons dit, elles n'ont guère d'importance; mais, elles ne manquent pas toujours pour cela d'intérêt. L'une d'elles, par exemple, contient des renseignements curieux sur la manière dont les paiements et les changes s'effectuaient à la fin du XVIe siècle, entre Anvers et les principales places commerciales de l'Europe. Elle a pour titre :

Livre D'Arithmetiqve, contenant plusieurs belles questions & demandes, propres & vtiles à tous ceux qui hantent la Trafique de Marchandise. Composé par feu Valentin Mennher Alleman : reueu, corrigé & augmenté en plusieurs endroits par Michiel Cognet. Ensemble Vne ample declaration sur le fait des Changes. Item Vn petit discours de bien & deuëment disconter, auec la Solution sur diuerses opinions y proposées. Avec La Solution des questions Mathematiques par la Supputation de Sinus, illustrées & amplifiées par les demonstrations Geometriques necessaires à icelles. A Anvers Chéz Jean waesberghe, à l'escu de Flandres. Avec Privilege, 1573. In-8°. L'exemplaire, que nous avons vu, appartient à la Bibliothèque communale de la Ville d'Anvers (N° 4815).

Une autre est plus curieuse encore, c'est celle qui a pour titre : *Cents Questions Ingenieuses Et Recreatives Pour Delecter & aguiser l'entendement, de feu V. Menher Allemand. Souldées & amplifiées par les raisons Geometriques requises à icelles par Michiel Coignet. A Anvers Chéz Iean waesberghe à l'escu de Flandres. Avec Privilege, 1573.* In-8°. Bibl. de l'Univ. de Louvain, Scienc. N° 1573. Coignet y donne la solution de 100 problèmes proposés deux années auparavant dans le *Liure d'Arithmeticque côtenant plusieurs belles questions et demandes bien propres & vtiles à tous Marchans, par M. Valentin Mennher de Kempten. A Anvers. Avec Priuilege de la Royale Ma. pour quatre ans. 1561.* In-8° (Imprimé par Gilles Coppens de Diest, comme on peut le voir au v° du dern. f°). Bibl. roy. de Belg., II 38947. Les 47 premiers problèmes ont trait à l'arithmétique, les 53 derniers sont des problèmes d'astronomie.

Enfin, une troisième arithmétique est intitulée : *Arithmetica Oft Een niew Cijfferboeck van Willem Raets Maestrichter. Waer in die Fondamenten seer grondelijck verclaert ên met veel schoonen questien gheillustreert worden, tot nut ende oorbaer van alle Coopliedê ende liefhebbers der seluer Consten. Met noch een Tractaet vande Wisselroede, met Annotatien verciert door Michiel Coignet. T'Hantwerpen, Ten huyse van Hendrick Hendricsen in de Leliebloeme, 1580, met Priuilegie voor thien Iaeren.* In-8°. Bibl. de l'Univ. de Gand Acc. 4590. Coignet y donne un petit traité de l'art de jeauger les tonneaux. Voyez sur ce dernier ouvrage : Le Paige, *Notes pour servir à l'histoire des mathématiques dans l'ancien Pays de Liége*, publiées dans le BULLETIN DE L'INSTITUT ARCHÉOLOGIQUE LIÉGEOIS, t. XXI, Liége 1888, pp. 481-482. Il y a eu une réimpression de cette arithmétique de Raets et Coignet, en 1597, à Anvers chez Jérôme Verdussen; je ne l'ai jamais vue.

(9) *Epitome Theatri Orbis Terrarvm Abrahami Ortelii. De nouo recognita, aucta, et geographica ratione restaurata, à Michaele Coigneto. Mathem. Antverpiano. Antverpiae. Svmptibvs Ioannis Keerbergii. Anno M.D.CI.* In-8° obl., Bibl. roy. de Belg., 14447.

Même titre : *Antverpiae Extat in Officina Plantiniana. M.DC.XII.* In-8° obl., Bibl. roy. de Belgique, II, 33992.

L'Epitome Dv Theatre De L'vnivers d'Abraham Ortelius : Nouuellement recogneu, augmentè et restaurè de meseure Geographique, par Michel Coignet Mathemat. d'Anvers. Antverpiae Svmptibvs Ioannis Keerbergii. Anno M.DCII. In-8° obl., Bibl. de l'Univ. de Gand (exemplaire incomplet du titre) Hist. 1602. Voyez sur ces éditions : la BIBLIOTHECA BELGICA, par le bibliothécaire en chef et

les conservateurs de la Bibliothèque de l'Université de Gand (t. V, Coignet, C. 307-C. 309). Voyez aussi : L'*École cartographique belge au XVI° siècle*, par F. Van Ortroy, publiée dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES (Bruxelles, 1897, t. XLII, pp. 265 et 266).

(10) *Speculum Orbis terrae*, sans date ni adresse d'imprimeur au titre ; mais au verso de l'avant dernier folio on lit " Vidua et haeredes Gerardi de Judaeis suis sumptibus hoc opus geographicum curavere imprimi apud Arnoldum Coninx, Antverpiae, Anno CIↃ.IↃ.XCIII. „ In folio. Bibl. royale de Belgique V. H. 14356.

(11) Document publié par Pinchart dans l'article cité plus haut (MESSAGER DES SCIENCES HISTORIQUES, DES ARTS ET DE LA BIBLIOGRAPHIE EN BELGIQUE, Gand, 1886, p. 188).

(12) Foppens, BIBLIOTHECA BELGICA, t. II, p. 890.

(13) Les mots " mre gnrl „ sont chacun surmontés dans le manuscrit d'une espèce de grand accent circonflexe qui n'a pas d'équivalent parmi les caractères typographiques dont dispose mon imprimeur.

(14) C'est-à-dire : " L'usage des douze divisions géométriques, par lesquelles „ (à l'aide d'un compas ordinaire) on résout facilement presque tous les „ problèmes des mathématiques.

„ Solutions de Michel Coignet anversois, mathématicien des Serenissimes „ princes de Belgique, tirées pour la plupart de cette partie occulte des nombres, „ qu'on nomme communément algèbre, etc.

„ 1610 „.

(15) O. c., t. V, Coignet, C. 305.

(16) Nous citons l'édition princeps éditée en 1533, à Nuremberg, par Schoner. En voici le titre complet :

Doctissimi viri et mathematicarum disciplinarum eximii professoris Ioannis de Regio monte de Triangulis omnimodis libri quinque : Quibus explicantur res necessariae cognitu, volentibus ad Scientiarum Astronomicarum perfectionem deuenire, quae cum nusquam alibi hoc tempore expositae habeantur frustra sine harum instructione ad illam quisquam aspirarit.

Accesserunt huc in calce pleraq ; D. Nicolai Cusani de Quadratura circuli, Deq ; recti ac curui commensuratione : itemq ; Io. de monte Regio eadem de re ἐλεγκτικά, *hactenus a nemine publicata.*

Omnia recens in lucem edita, fide et diligentia singulari. Norimbergae in aedibus Io. Petri. Anno Christi M.D.XXXIII.

A la dernière page. *Excudebatur Norimbergae per Ioh. Petreium, anno M.DXXXIII, Mense Augusto.* In fol. Bibl. roy. de Belg. V. 4983 et V. H. 8119.

La loi du Sinus est l'objet de la 1e prop. du liv. II, p. 46.

(17) *Willebrordi Snellii a Royen, R. F. Doctrinae Triangulorum canonicae Libri Qvatvor, Quibus Canonis Sinuum, tangentium et secantium constructio, Triangvlorvm tam planorvm, qvam sphaericorvm expedita dimensio breviter ac perspicue traditur : Post mortem Authoris in lucem editi a Martino Hortensio Delfensi : Qui istis Problematum, Gaeodaeticorum et Sphaericorum tractatus singulos adjunxit, quibus praecipuarum utriusque Trigonometriae propositionum usus declaratur.* Lvgdvni Batavorvm, Ex officinâ Ioannis Maire

CIↃ.IↃ.CXXXVII. In-8°. Lib. II, Prop. IV, pp. 65, 66. Bibl. roy. de Belg. V. 4985.

(18) *Vorlesungen über Geschiche der Mathematik*, Zweiter Band, Zweiter Auflage, Leipsig, Teubner, 1900. ch. 73, p. 706. Voyez aussi van Geer. *Notice sur la vie et les travaux de Willebrord Snellius* publiée dans les ARCHIVES NÉERLANDAISES DES SCIENCES EXACTES ET NATURELLES, t. XVIII, Harlem, 1883, p. 453.

(19) *Opvs Palatinvm de Triangvlis A Georgio Ioachimo Rhetico coeptvm : L. Valentinvs Otho principis Palatini Friderici IV. electoris mathematicvs consvmmavit. An. Sal. hvm. CIↃ.IↃ.XCVI.* Le titre n'a ni nom d'imprimeur, ni nom de ville; mais à la dernière page du traité intitulé, " L. Valentini Othonis Parthenopolitani De Triangvlis Globi sine angvlo recto libri qvinqve, „ on lit : *Neostadii in Palatinatv. Excudebat Matthaeus Harnisius, Anno Salutis CIↃ.IↃ.XCVI.* In-fol. (Bibl. de l'Observatoire de Belgique; Bibl. de l'Univers. de Louvain. Science N° 215). La loi du Sinus des triangles rectilignes se trouve dans le " Georgii Ioachimi Rhetici de Triqvetris Rectarvm linearvm in planitie liber vnus, „ pp. 95 et 96.

Ces deux exemplaires de l'*Opvs Palatinvm* sont incomplets des grandes tables des lignes trigonométriques. La Bibliothèque de l'Université de Louvain les possède néanmoins (Scienc. N° 216) dans l'édition qui a paru, en 1607 à Neustadt, sous le titre : *Georgii Ioachimi Rhaetici Magnus Canon Doctrinae Triangulorum ad Decades secundorum scrupulorum et ad partes 10.000.000.000. Recens emendatus a Bartholomaeo Pitisco Silesio. Addita est brevis commonefactio de fabricâ et usu huius Canonis. Quae est summa doctrinae et quasi nucleus totius operis Palatini. Canon hic, una cum brevi commonefactione de eius fabricâ et usu, etiam separatim ab Opere Palatino venditur. In Bibliopoleio Harschiniano.* In-f° sans date ni adresse d'imprimeur au titre. Enfin, j'ai trouvé encore à la Bibliothèque de l'Université de Louvain (Scienc. 173) le rarissime *Thesaurus mathematicus sive canon sinuum... olim quidem incredibili labore a Georgio Ioachimo Rhetico supputatus; ac nunc primum in lucem editus ac cum viris doctis communicatus a Bartholomaeo Pitisco Grunbergensi Silesio... Francofurti excudebat Nicolaus Hoffmannus sumptibus Jonae Rosae. CIↃ.IↃ.CXIII.* In-f°. — Voyez sur ces diverses éditions : Brunet, *Manuel du libraire et de l'amateur de livres*, 5e édit.. t. IV. Paris, 1863, col. 1264-5; Graesse, *Trésor de livres rares et précieux*, t. VI, Dresde, 1865, p. 102; Terquem, *Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques*, t. I, Paris, 1855, pp. 8-13.

(20) NOTE SUR LE FUNDAMENTUM ASTRONOMICUM DE RAYMARUS URSUS DITHMARSUS (*). — Ce petit opuscule, assez oublié aujourd'hui, a eu son heure de célébrité tapageuse dans la grande querelle de son auteur avec Tycho Brahé. Il occupe une place considérable dans l'histoire de la trigonométrie et mérite à ce point de vue que nous nous y arrêtions un instant. En voici d'abord le titre complet que je transcris sur l'exemplaire de la Bibliothèque de l'Université de Louvain (Scienc. 711) :

(*) La démonstration se trouve au chap. 3, p. 27 r°.

Nicolai Raymari Vrsi Dithmarsi || *Fvndamentvm astronomicvm : || id est || nova doctrina || sinvvm et triangvlorvm || eaqve absolvtissima et perfe- || ctissima, eivsque vsvs in astronomi- || ca Calculatione & obseruatione. || Cui adiunctae sunt : || I. Hypotheses nouae ac verae motuum corporum Mundanorum. || II. Extructio Canonis sinuum, vulgaris quidem, sed solita via facilior. || III. Sectio anguli data ratione, seu in quodlibet partes. || IV. Quadratio Circuli Demonstrabili ratione, eiusque Demonstratio. || V. Solutio Triangulorum vsitatiorum noua ac facillima ratione. || VI. Solutio plerorumque Triangulorum per solam prostaphaeresin. || VII. Eiusdem prosthaphaereseos Apodixis, Causa ac Demonstratio. || Omnibus seculis problemata sane desideratissima aliaq; prius nec audita || nec antea visa paradoxa quam plurima.* || (Vignette : Buste couronné de lauriers avec la devise " Sapientia constans. „) || Αγεωμέτρητος οὐδεὶς εισίτω. || Argentorati. || Excudebat Bernhardus Iobin. || 1588. || In 4° (*).

L'ouvrage est divisé en cinq chapitres, précédés d'une épître dédicatoire. En voici les titres :

Caput I. De logistica Astronomica (pp. 1 r°-5 v°).

Cap. II. De extructione canonis Sinuum (pp. 5 v°-13 v°).

Cap. III. De Doctrina Triangulorum (pp. 13 v°-30 v°).

Cap. IV. De Observatione locorum Stellarum fixarum (pp. 31 r°-36 v°).

Cap. V. De Observatione motuum planetarum, ubi de novis nostris hypothesibus (pp. 37 r°-40 v°).

Ce sont les chapitres II et III qui renferment la trigonométrie de l'auteur, et c'est d'eux que je me propose de dire un mot.

Dans le chapitre II Ursus dit qu'il va exposer trois méthodes (**) pour construire la table des sinus. En réalité il n'en donne que deux, car, il l'avoue d'ailleurs lui-même (***), la soi-disant troisième méthode fournirait plutôt un moyen de se passer de sinus.

L'auteur prend pour point de départ de la première méthode l'inscription à la circonférence des polygones réguliers élémentaires. Il se sert ensuite des

(*) Bierens de Haan en donne une description bibliographique détaillée dans son étude intitulée : *Quelques quadrateurs du cercle dans les Pays-Bas*, publiée dans le BULLETTINO DE BONCOMPAGNI (t. VII, 1874, pp. 103-104 en note); et Rudolf Wolf en fait une analyse très remarquable, mais à un point de vue différent de celui où je me place ici, dans le VIERTELJARSCHRIFT DER NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT IN ZÜRICH (Zurich, 1886, ASTRONOMISCHE MITTHEILUNGEN, LXVIII, pp. 313-327). J'ajouterai que Delambre le résume lui aussi, mais d'une manière beaucoup plus sommaire dans son *Histoire de l'Astronomie moderne* (t. I, liv. III, pp. 287-293) et qu'enfin, je trouve sur Ursus Dithmarsus (de son vrai nom Nicolas Reimers), des renseignements biographiques et bibliographiques nombreux, dans la *Johannis Molleri Flensburgensis Cimbria literata, Hauniae MDCCXLIV* (In-fol., t. I, pp. 513-518).

(**) P. 5 v°.

(***) P. 13 v°.

théorèmes suivants qu'on me permettra, pour plus de clarté, d'écrire ou d'énoncer en notations et en langage moderne (*) :

1. Théorème du carré de l'hypoténuse.
2. $\text{Cos A} = \sqrt{R^2 - \sin^2 A}$.
3. $\text{Sin. vers. A} = R - \cos A$.
4. $4 \sin^2 \frac{1}{2} A = \sin^2 A + \text{sin. vers}^2 A$.
5. $\frac{R}{\sin A} = \frac{\cos A}{\frac{1}{2} \sin 2A}$.
6. $\text{Corde (A} - \text{B)} = \sqrt{(\sin A - \sin B)^2 + (\cos B - \cos A)^2}$.

Enfin, il remarque qu'on abrège d'un tiers la construction des tables par la formule

$$\text{Sin } (60 + A) - \sin (60 - A) = \sin A.$$

A part l'emploi de cette dernière formule qui est de Viète (**), toute cette première méthode, comme nous le verrons plus loin, a beaucoup d'analogie avec celle de Regiomontan (***).

Dans sa deuxième méthode, Ursus se base sur un théorème trouvé par Burgi pour déterminer les sections angulaires (IV). Delambre regrettait déjà vivement et avec raison, que l'énoncé en soit si obscur et il n'a malheureusement pas encore été complètement éclairci depuis. Burgi, on le sait, ignorait le latin, ce qui fut peut-être cause que ses œuvres ne furent jamais éditées et que ses méthodes restèrent longtemps des énigmes (V). En 1872 seulement on a appris à les mieux connaître et à en apprécier la haute valeur, par l'analyse du manuscrit de la Bibliothèque de Pulkowa (VI), donnée par Rudolf Wolf dans les ASTRONOMISCHE MITTHEILUNGEN.

Reste enfin la troisième méthode, c'est-à-dire celle qui permettrait de se passer de sinus pour résoudre les triangles. Elle s'appuie sur une quadrature du cercle de Simon Duchène, plus connu sous le nom latin de Simon à Quercu, citoyen de Delft. Ursus qualifie cette quadrature de découverte divine, divinum inventum (VII). Elle est cependant aussi fautive, on le sait, que toutes

(*) P. 6 v°.
(**) Voir ci-dessous, note du texte, n° 14.
(***) Voir ci-dessous, note du texte, n° 5.
(IV) P. 8 v°.
(V) *Hist. de l'Astr. mod.*, t. I, p. 288 et suiv.
(VI) *Astronomische Mittheilungen von Dr Rudolf Wolf, Professor der Astronomie in Zürich, XXXI-XXXX. Aus der Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich besonders abgedruckt.* Zurich, 1872-1876; pp. 6-28.
(VII) P. 13 v°.

les autres et ne mérite pas que nous nous y arrêtions (*). L'auteur n'explique pas comment il entend l'appliquer et se contente de nous avertir qu'il le fera plus tard dans son astronomie (**).

On le voit, même en se plaçant exclusivement au point de vue de la trigonométrie ce n'est pas ce chapitre II, qui donna tant d'importance à l'apparition du *Fundamentum Astronomicum* et qui, même aujourd'hui, rend encore si intéressante la lecture de ce petit volume. Ce succès était dû à une règle qu'Ursus donne dans le chapitre III et que Clavius, bon juge dans la matière, ne craignait pas de nommer " acutum et ingeniosum inventum " (***). On la nommait alors la prostaphérèse. Werner en avait eu la première idée un siècle et demi auparavant. Depuis lors elle était insensiblement devenue d'un usage courant dans les observatoires; Wittich, Tycho Brahé, Burgi la connaissaient; mais Ursus la lançait alors dans le grand public savant, pour la première fois.

La prostaphérèse, je ne dois pas l'apprendre au lecteur, la prostaphérèse, comme l'étymologie du mot l'indique (πρόσθεσις addition, ἀφαιρέσις soustraction), la prostaphérèse, dis-je, consiste essentiellement à remplacer par une addition ou par une soustraction les longues et pénibles multiplications nécessitées par les produits de deux sinus ou de deux cosinus en se servant des formules

$$\text{Cos A cos B} = \tfrac{1}{2} [\cos (A - B) + \cos (A + B)]$$
$$\text{Sin A sin B} = \tfrac{1}{2} [\cos (A - B) - \cos (A + B)]$$

Qu'on veuille se rappeler, qu'au XVIe siècle une formule de ce genre ne s'obtenait que par des considérations purement géométriques; voie toujours détournée, compliquée et pénible en comparaison de nos procédés algébriques. On appréciera mieux dès lors le mérite du théorème d'Ursus et la profonde sensation qu'il produisit sur ses contemporains.

Cinq ans plus tard, en 1593, Clavius dans son *Astrolabium* (IV) fit faire un progrès notable à la méthode en montrant qu'elle s'applique à la multiplication de deux grands nombres quelconques. Le savant jésuite remplace les nombres par des lignes trigonométriques équivalentes et, *à ma connaissance, le premier*

(*) Voyez : Bierens de Haan, *Quelques quadrateurs du cercle dans les Pays-Bas* (BULLETTINO DE BONCOMPAGNI, t. VII, pp. 103-105).
(**) P. 13 v°.
(***) *Christophori Clavii Bambergensis e Societate Iesu Astrolabivm. Cum privilegio. Romae. Impensis Bartholomaei Grassi. Ex Typographia Gabiana. M.D.XCIII. Superiorvm permissv.* In-4°; pp. 178-194. Bibl. roy. de Belg. V. 5144. — Dans les *Christophori Clavii Bambergensis e Societate Iesu Operum Mathematicorum tomus tertius complectens commentarium in Sphaeram Ioannis de Sacro Bosco et Astrolabium. Moguntiae Sumptibus Antonii Hierat, excudebat Reinhardus Eltz cum gratia et privilegio sacrae Caes. Maiest. Anno M.DC.XI.* In-f°; p. 170. Bibl. roy. de Belg. V. 4818.
(IV) *O. c.*, pp. 94-100.

chez les latins fit ainsi usage dans un ouvrage imprimé d'arcs et d'angles auxiliaires (*).

Pour terminer ce sujet revenons encore un instant à Ursus et à Tycho Brahé. Les deux ennemis en étaient à une des périodes les plus violentes de leur brouille et se lançaient mutuellement à la face des torrents de provocations et d'injures. Voici un des défis d'Ursus :

Zoïle si poteris, tu quoque triangula solvas
Perque sinus solos, absque operante manu ?
Ut divisio neque multiplicatio fiat,
Sit quocunque loco maximus ipse sinus (**).

La trigonométrie de Tycho Brahé, publiée en 1886 par Studnicka (***), montre avec quel succès le grand astronome releva le gant et quel heureux usage il savait faire de la prostaphérèse (IV).

(*) Voici en outre quelques renseignements complémentaires que j'ai réunis sur l'histoire de cette méthode :

1° Ibn Jûnis, astronome arabe, dont les écrits restés manuscrits ne sont connus que par une analyse de Delambre, l'a employé le premier (Delambre, *Hist. de l'Astr. du Moyen Age*, p. 165);

2° Rudolf Wolf en a trouvé un second exemple dans un mémoire manuscrit de Burgi relatant une observation du 23 décembre 1590. Ce texte de Burgi est encore inédit (ASTRON. MITTHEIL. XXXII, 1873, p. 60);

3° Clavius, le premier, en 1593, *publie* la méthode dans son *Astrolabium*;

4° Enfin, en 1608, Pitiscus en publie d'autres exemples au chap. 5 de la deuxième édition de sa *Trigonometria*, p. 161, etc. (Voir sur les trois éditions de la *Trigonometria* de Pitiscus la note 27 ci-dessous, p. 116).

(**) *Nicolai Raimari Vrsi Dithmarsi... De Astronomicis hypothesibvs sev systemate mvndano... Pragae Bohemiorvm apvd avthorem : absq; omni privilegio Anno M.D.XCVII.* In-4°. Cet ouvrage est rarissime. L'exemplaire que j'ai eu à ma disposition appartient à la Bibliothèque de l'Université de Liége. Il est relié à la suite de *Ioannis Keppleri... de Stella nova in pede serpentarii...* Pragae, Typis Pauli Sessii... M.DC.VI, et est coté, I, 121, 5. Houzeau. dans son *Catalog. des ouvrag. d'astron. et de météor. qui se trouvent en Belg.*, Brux. 1878, p. 37, a dans l'orthographe du nom de l'auteur, une faute de nature à rendre les recherches difficiles.

Le passage cité se trouve p. Biij v°.

(***) *Tychonis Brahe triangulorum planorum et sphaericorum praxis Arithmetica.* (Prague, 1886, in-4°).

(IV) Consultez sur la prostaphérèse et son histoire, les beaux travaux de von Braunmühl, surtout : *Zur Geschichten des prostapherischen Methode in der Trigonometrie*, publiée dans le FESTSCHRIFT ZUM SIEBZIGSTEN GEBURTSTAGE MORITZ CANTORS, Leipzig, 1899 (pp. 15-29) et *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. Erster Teil. Von den ältesten Zeiten bis zur Erfunding der Logarithmen.* Leipzig, Teubner, 1900 (Voir la table de l'auteur au mot « prosthaphäresis », p. 256).

(21) NOTICE HISTORIQUE SUR LES DIVERSES ÉDITIONS DU CANON MATHEMATICUS DE VIÈTE (*). — *Fran. Vietaei* || *libellorum* || *Svpplicvm in regia* || *magistri insignisque Mathematici varia* || *opera Mathematica.* || *In qvibvs tractatvr canon mathematicvs,* || *sev* || *ad triangvla.* || *Item canonion trian gvlorvm latervm* || *rationalium : vnà cum uniuersalium inspectionum ad Cano-* || *nem Mathematicum, libro singulari.* || *Qvae qvidem omnia illvstrantvr tabvlis* || *& Appendicibus ab eodem authore recognitis.* || (Marque d'imprimeur) || *Parisiis,* || *Apud Bartholomaeum Macaeum, in monte D.* || *Hilarij, sub scuto Britanniae.* || *M.D.C.IX.* || *Cum privilegio regis.* || Grand in-fol. (**) (Bibliothèque du Collège de la Compagnie de Jésus à Louvain).

Voilà un titre bien propre à étonner le lecteur qui n'aurait pas suivi attentivement les derniers travaux publiés en Allemagne sur l'histoire des mathématiques. Où ne lit-on pas effet, que le *Canon mathematicus* parut à Paris en 1579, chez Jean Mettayer; que mécontent des fautes d'impression qu'il renfermait, Viète lui-même chercha à en retirer de la circulation tous les exemplaires (***); qu'il devait avec l'*Harmonicon coeleste*, ouvrage aujourd'hui perdu, former le deuxième volume de ses œuvres complètes; que celles-ci ont commencé à être éditées à Leyde, en 1646, chez les Elzevier, sous la direction de François van Schooten (IV); que le second volume ne parut jamais; que tout cet ensemble de contretemps et de fatalités ont fait du *Canon* un des livres les plus rares qui existent? Or voici un exemplaire daté de 1609, au lieu de l'être de 1579, et portant l'adresse de Barthélemy Macaeus au lieu de celle de Jean Mettayer.

Je le laissais entendre en commençant et je le répète encore une fois, si ce détail de bibliographie est encore peu connu, je n'ai pas toutefois la prétention de le donner ici le premier. Cantor et von Braunmühl le mentionnent l'un et l'autre dans leurs *Vorlesungen* (V) et ils ont soin tous les deux de nous dire que l'honneur de l'avoir trouvé revient à Eneström. C'est lui en effet qui dès 1892 signala dans la BIBLIOTHECA MATHEMATICA le Canon de 1609 de la Bibliothèque royale de Stockholm. Il m'a paru qu'il y avait un certain intérêt à confirmer cette découverte, en appelant en même temps l'attention sur le *Canon*

(*) Cette note est le résumé de la communication que j'ai eu l'honneur de faire aux membres de la 1re section de la Société scientifique en octobre 1900.

(**) La démonstration de la loi du Sinus se trouve à la p. 23.

(***) Ce renseignement est donné par Montucla, au tome I de son *Histoire des Mathématiques* (Paris, Agasse, an VIII, p. 610).

(IV) *Francisci Vietae Opera mathematica, in unum volumen congesta, ac recognita opere ac studio Francisci a Schooten Leydensis Matheseos professoris. Lugduni Batavorum. Ex officinâ Bonaventurae et Abrahami Elzeviriorum, CIↃ.IↃ.CXLVI.* In-fol. Voyez la préface des Elzevier (p. 5 n. ch.).

(V) Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 2e Band, 2 Auflage, Leipzig, Teubner, 1900, p. 583. — Von Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonométrie.* I Teil. Leipzig, Teubner, 1900, p. 138.

mathematicus de la Bibliothèque du Collège de la Compagnie de Jésus à Louvain.

Qu'on me permette cependant de n'être pas sur tous les points d'accord avec les savants professeurs allemands, et de me séparer d'eux dans une des conséquences qu'ils déduisent de la trouvaille assez inattendue d'Eneström. Je voudrais dire ici en quoi et pourquoi; c'est l'objet de cette note.

Viète, on le sait, était fort mécontent de sa première édition. Son *canon* disait-il était " infeliciter editus „, bien mal édité (*). A plusieurs reprises, dans son livre des *Réponses sur divers sujets de mathématiques* (**), il laisse entrevoir le dessein qu'il avait formé de le republier. Le *Canon* de 1609 serait d'après Cantor et von Braunmühl une deuxième édition, non pas de Viète qui était mort depuis six ans, mais d'un libraire quelconque, mettons de Barthélemy Macaeus, car mes honorables contradicteurs ne le nomment pas. Celui-ci aurait repris à ses risques et périls le projet de Viète et l'aurait enfin mis à exécution.

Je ne puis partager cette manière de voir. Un examen attentif du *Canon* de Louvain me donne la conviction que les exemplaires de 1609 ne sont autre chose que de vieux *Canones* de 1579 qu'on a cherché à rajeunir en renouvelant leur première feuille, c'est-à-dire le titre, la table et la préface.

Quand un ouvrage rare comme le *Canon* est en même temps l'œuvre d'un auteur célèbre comme Viète il jouit aisément d'un privilège; c'est de faire les délices de tous les bouquinistes et amateurs de vieux livres. Aussi pour trouver des descriptions bibliographiques du *Canon* n'avons-nous que l'embarras du choix. Je m'arrêterai à deux des plus importantes, celle du *Manuel du libraire et de l'amateur de livres* de Brunet (***) et celle du *Trésor de livres rares et précieux* de Graesse (IV).

Dans l'exemplaire de Libri vendu en 1857, dit Brunet, le verso du titre était blanc; dans l'exemplaire aux armes de de Thou qui figurait à la vente Labey, au verso du titre se trouvait indiqué le contenu de la première partie de ce grand

(*) *Francisci Vietae variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII. Cujus praecipua capita sunt, De duplicatione Cubi, et Quadratione circuli, Quae claudit* Πρόχειρον, *seu Ad vsum Mathematici Canonis Methodica. Turonis apud Iamettium Mettayer, Typographum Regium, 1593.* In-fol. (p. 15, r°). Bibl. roy. de Belg. V. 4908. C'est l'édition originale. Dans l'édition Schooten, p. 323.

Voici au sujet des difficultés que rencontrait Viète un passage curieux et peu connu de la préface du *Canon*. C'est l'éditeur qui tient la plume.

" Novo et insolito labore deterriti artifices, sculptores, fusores, librarii, locarunt suas operas difficulter, et locatas praestiterunt ocitantissime. Operariorum morositatem et socordiam excitabat auctoris praesentia et cura, sed eam homini ad altiora magistratuum subsellia erecto et negotiis pleno, non licuit, quoties res postulabat adcommodare. „

(**) Ed. de 1593, pp. 15 r° et 30 v°; éd. Schooten, pp. 371 et 400.

(***) 5e éd., Paris, Didot, 1864, col. 1212.

(IV) Dresde, Rudolf Kuntze, 1862, t, VI, p. 312.

volume; enfin " le catalogue Longman pour 1816 et celui de 1820 en annonçaient un exemplaire avec un titre daté de Londres 1589 (*) „. Qu'on veuille bien le remarquer, ce dernier est par conséquent de dix ans postérieur à l'édition de Paris.

Voilà donc déjà d'après Brunet trois titres, et surtout deux dates différentes.

Graesse ne parle pas autrement que lui. Dans certains exemplaires, dit-il, au verso du titre se trouve indiqué le contenu de la première partie du volume, dans d'autres ce verso est blanc (**). Il passe cependant sous silence les *Canones* datés de Londres 1589.

Que conclure de tout ceci? Sinon que les titres des divers exemplaires du *Canon* varient beaucoup. Personne ne s'était cependant avisé jusqu'ici de faire autant d'éditions distinctes, que de titres différents.

Après le titre, j'ai collationné sur le *Canon* de Louvain les numéros et les signatures des pages, en les comparant à celles de l'édition de 1579, qui sont minutieusement indiqués par Brunet et par Graesse (***). Cette pagination est compliquée, bizarre même, on le sait; néanmoins la concordance est parfaite. J'ai lu, en outre, avec le texte original sous les yeux, la charmante étude que Hunrath vient de consacrer au *Canon mathematicus* de Viète dans le FESTSCHRIFT ZUM SIEBZIGSTEN GEBURSTAGE MORITZ CANTORS (IV). L'auteur s'est servi, nous dit-il, de l'exemplaire de la Bibliothèque de Cassel, qui est de 1579 (V). En maint endroit il en signale en passant les fautes d'impression, " les bonnes fautes „, c'est bien cette fois le cas de le dire; elles se retrouvent toutes dans l'édition de 1609 (VI). Mais il est superflu d'insister plus longuement, M. von Braunmühl ayant eu soin

(*) *Loc. cit.*

(**) *Loc. cit.*

(***) *Loc. cit.*

(IV) Leipzig, Teubner, 1899; publié en supplément dans le ZEITSCHRIFT FUR MATHEMATIK UND PHYSIK.

(V) *Op. cit.*, p. 213.

(VI) Les fautes dont il faut tenir compte ici sont évidemment celles qui sont purement typographiques et dues à la négligence des correcteurs d'épreuves. Deux d'entre elles ont surtout attiré mon attention.

Après les feuilles signées α-ζ, suivent quatre autres signées d'étoiles. Graesse dit (*loc. cit.*) que dans plusieurs exemplaires, la signature de la troisième fait défaut. C'est une particularité que l'on rencontre à la fois dans les *Canones* de Louvain et de Cassel (Pour ce dernier, voyez Hunrath, O. c. p. 217).

Ensuite dans la pagination des *Vniversalivm inspectionvm ad canonem mathematicvm liber singularis* quatre nombres sont erronés. Ce sont ceux des pp. chiff. 33 au lieu de 25, 34 au lieu de 26, 39 au lieu de 31, 40 au lieu de 32. Le *Canon mathematicus* de Cassel a identiquement les mêmes fautes (V. Hunrath, p. 230).

de dire lui aussi à ses lecteurs que les éditions de 1579 et de 1609 sont identiques (*).

Voici enfin un dernier genre d'arguments plus convaincants encore, si c'est possible, que ceux qui précèdent.

En examinant le papier du *Canon* de Louvain, on s'aperçoit aisément qu'il est différent dans les quatre premières pages et dans le corps de l'ouvrage. Dans le papier qui a servi pour celui-ci les vergeures sont plus espacées entre elles, que dans celui de la première feuille. La différence est d'à peu près un centimètre.

Ensuite, si pour rajeunir ses exemplaires, l'éditeur de 1609 s'est mis en frais d'un nouveau titre, il a cependant hésité à faire la même dépense pour les dernières pages. Le *Canon mathematicus* est terminé par une feuille entière, dont la 1re et la 4e pages sont blanches, tandis que la 2e et la 3e forment ensemble un grand tableau intitulé : *Canonicae Analogiae Sphaerici Trianguli rectanguli.* Tout au bas dans le coin de gauche, on y lit en caractères bien apparents : " Excudebat Ioannes Mettayer in Mathematicis Typographus Regius || M.D.LXXIX || Cum privilegio. „ Cette phrase se trouve dans l'édition de 1609, comme dans celle de 1579. Or le *Canon* de Louvain présente une particularité bien digne d'attention. La date M.D.LXXIX y a été modifiée par l'éditeur au moyen d'un procédé des plus primitifs. Il s'est contenté de coller au-dessus du nombre M.D.LXXIX un petit rectangle de papier portant le millésime M.D.C.IX imprimé, mais qui permet néanmoins de lire encore très aisément par transparence le premier nombre.

Je conclus.

Le *Canon mathematicus* est un ouvrage de la plus haute importance dans l'histoire de la trigonométrie. J'ai déjà dit qu'il était devenu des plus rares. On en signale les exemplaires et on les compte à peu près avec le soin que l'on apporte à faire le relevé des manuscrits d'autres auteurs. Eneström et après lui Cantor et von Braunmühl nous ont donc appris un fait bien propre à intéresser tous ceux qui prennent goût à l'histoire des mathématiques. En raison même de la curiosité qu'il excite, j'ai cru utile d'en mieux préciser la nature.

Il n'existe à proprement parler qu'une seule édition du *Canon mathematicus*, celle de 1579 ; mais on y a adapté des titres divers suivant les besoins des circonstances. Sans doute de nos jours un pareil procédé paraîtrait étrange ; il n'en était pas de même à la fin du seizième siècle. Il ne cause aucune surprise pour peu que l'on soit au courant des usages de la librairie de l'époque.

(22) Les deux démonstrations sont données dans le tome II des *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* de Cantor (2e Aufl.) ; celle de Regiomontan à la page 267, celle de Snellius à la page 706. Cependant ni Snellius, ni Rheticus, ni Coignet, ni Ursus Dithmarsus n'ont la double circonférence et le double triangle qui rend la démonstration de Snellius si parlante quand on l'expose comme le fait Cantor. Quant à Viète on ne le reconnaîtrait plus s'il

(*) " Dagegen erschien 1609, sechs Jahre nach seinem Tode, eine unverän- „ derte Ausgabe des Werkes zu Paris. „ (O. c., p. 158).

s'exprimait comme tout le monde ; il ne fait pas de figure et se contente de dire que la proposition se démontre " ex inscriptione trianguli in circulo „.

(23) " De Triqvetris, etc., pp. 100-102.

Je n'ai jusqu'ici rencontré cette méthode de résolution d'un triangle dont on connaît les trois côtés, dans aucun auteur antérieur à Rheticus. Je ne crois pas me tromper en disant qu'elle est de lui.

(24) *De Triangulis*, Lib. I, Prop. 42-47, pp. 35-40.

(25) *Euclidis opera omnia ediderunt J. L. Heiberg et H. Menge. — Euclidis elementa edidit et latine interpretatus est J. L. Heiberg.* Vol. I. Lib. I-IV continens. Lipsiae Teubner MDCCCLXXXIII. Lib. II, prop. 13, p. 158 et seq.

(26) *De Triangulis*, Lib I, Prop. 35, pp. 38 et 39.

Voici comment s'opérait la partie principale d'une transformation de ce genre. Me conformant à un usage très moderne, je prie le lecteur de bien vouloir faire la figure.

Soit ABC, le triangle proposé et a, b, c, les côtés opposés respectivement aux angles A, B, C, rangés par ordre de grandeur ; $a > b > c$. Il s'agit de trouver la valeur du segment HB déterminé sur BC par la hauteur AH.

Du sommet A comme centre avec c pour rayon décrivons une circonférence qui coupe a en D, b en E, et le prolongement de b en F. La 35e proposition du 3e livre d'Euclide donne

$$\frac{CB}{CF} = \frac{CE}{CD}$$

c'est-à-dire

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b-c}{a-2.\,HB}$$

etc.

(27) NOTE HISTORIQUE SUR LA FORMULE

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\,\frac{1}{2}\,(A+B)}{tg\,\frac{1}{2}\,(A-B)}.$$

Cette formule a jadis attiré d'une manière toute spéciale l'attention de Delambre. Peut-être, n'est-il pas sans intérêt de compléter ici les renseignements qu'il a réunis sur elle et de les rectifier en quelques points.

Au fond il ne sait pas trop à qui l'attribuer. Dans son *Histoire de l'Astronomie du Moyen Age* (*), il dit qu'elle est de Viète, qui l'a effectivement donnée dans le chapitre XIX du *Variorum de rebus mathematicis responsorum Liber VIII* (**). " Voilà une formule très utile, remarque Delambre, et qui est restée. „

Il y revient ensuite constamment dans son *Histoire de l'Astronomie moderne* et la signale, dans les *Triangulorum geometriae libri quatuor* du gantois van

(*) Paris, Courcier, 1819. In-4o. Chap. VIII, p. 468.

(**) Turonis, 1593, p. 32 ro. Dans l'édition des Elzevier, p. 402.

Lansberge (*), dans les *Trigonometriae libri quinque* de Pitiscus (**), dans la

(*) Paris, Courcier, 1821. In-4°, t. II, p. 42.

La première édition de la trigonométrie de van Lansberge date de 1591. Elle est rare et se trouve à la Bibliothèque de l'Université de Louvain, Sciences, n° 569. En voici le titre : *Philippi Lansbergi triangulorum geometriae libri quatuor in quibus novâ et perspicuâ methodo et* ἀποδείξει, *tota ipsorum triangulorum doctrina explicatur. Ad Senatum Populumq ; Middelburgensem Lugduni Batavorum. Ex officina Plantiniana. Apud Franciscum Raphalengium CIↃ.IↃ.XCI.* In-4° de 12 pp. non ch., et 207 pp. chiffrées. C'est la seule édition que Coignet ait pu connaître. La formule qui nous occupe s'y trouve à la page 162.

Depuis lors la trigonométrie de van Lansberge a été rééditée deux fois :

D'abord en 1631... *Editio secunda ab auctore recognita, multisque in locis aucta. Amsterdam, apud Guilielmum Blaeuw. CIↃ.IↃ.XXXI.* In-4° Bibl. roy. de Belg. V. 4986. La formule se trouve pp. 117, 118.

Ensuite en 1663 dans la compilation intitulée : *Philippi Lansbergi astronomi celeberrimi Opera omnia, Middelburgi Zelandiae apud Zachariam Romam, 1663* In folio. Bibl. roy. de Belg. V. H. 8257. La formule se trouve p. 59. C'est cette dernière édition, que cite Delambre.

(**) Id., t. II, p. 33.

Delambre cite la 3e édition, qui est de 1612, et dont voici le titre complet :

Bartholomaei Pitisci Grunbergensis Silesii Trigonometriae sive de dimensione Triangulor. libri quinque. Item Problematum variorum nempe Geodaeticorum, Altimetricorum, Geographicorum, et Astronomicorum libri decem. Editio tertia : Cui recens accessit Problematum Architecticorum liber unus, Francofurti Typis Nicolai Hofmanni sumptibus Ionae Rosae M.DC.XII. In-4°.

La formule se trouve cependant déjà dans les deux premières éditions. (Augsbourg, 1600, pp. 64-67 ; Augsbourg, 1608, pp. 90-93 ; Francfort, 1612, pp. 99-101).

Arrêtons-nous un instant aux trois éditions de la *Trigonometria* de Pitiscus, non pas pour répéter une fois de plus après tant d'autres, que dans ses *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (2e Band, 2e Aufl., p. 604), Cantor a une erreur de bibliographie à leur sujet et qu'il n'y a pas lieu de révoquer en doute l'existence de l'édition de 1608 ; mais parce que cette édition est en tous cas fort rare et qu'il n'est peut être pas inutile d'en signaler deux exemplaires dans les bibliothèques belges, l'un à la Bibliothèque royale de Belgique. V. 4984, l'autre à la Bibliothèque de l'Université de Gand. Math. 280. La Bibliothèque royale de Belgique possède en outre l'édition d'Augsbourg, 1600. V. 4984[1]. Quant à l'édition publiée en 1612 à Francfort, elle se trouve à la Bibliothèque de l'Université de Louvain. Scienc., n° 644.

J'ai eu tous ces exemplaires en main.

D'autre part dans ses *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* (Erster Teil, Leipzig, p. 223) von Braunmühl dit avoir eu les trois éditions à sa disposition à la " Hof- und Staatsbibliothek " de Munich.

Voilà donc une question que l'on pourrait croire définitivement résolue et

Trigonometria d'Ougtred (*), dans la *Trigonometria Britannica* de Briggs et Gellibrand (**) et jusque dans les *Joh. Kepleri et Jacobi Bartschii, Tabulae manuales logarithmicae* rééditées par Eisenschmid en 1700 (***). Il ne lui aurait

terminée, s'il ne fallait pas toujours craindre qu'une erreur de Cantor ne continue à se répandre malgré toutes les rectifications venant d'ailleurs.

Le lecteur me demandera peut-être l'intérêt spécial qui s'attache à l'existence de ces trois éditions.

Je lui répondrai qu'elles sont assez différentes entre elles et qu'elles accusent un progrès marqué l'une sur l'autre. On peut les regarder comme faisant connaître à des intervalles presque réguliers de quelques années, le progrès de l'enseignement de la trigonométrie, science considérée à cette époque comme l'une des plus relevées des hautes mathématiques.

(*) Id., t. II, p. 89.

Trigonometria, hoc est modus computandi triangulorum latera et angulos, ex canone mathematico traditus et demonstratus collectus ex chartis clarissimi domini Wilhelmi Ougtred Oetonensis per Richardum Stokesium collegii regalis in Cantabridgia socium et Arthurum Haughton generosum... Londini, R. et L. W. Leybourn, 1657. In-4°. Bibl. roy de Belg. V. H. 8078.

Cet ouvrage d'Ougtred renferme bien des choses intéressantes. Delambre n'a cependant rien cru devoir y signaler, à part notre formule, qu'il trouve au chapitre II (pp. 16 et 17) et " une démonstration un peu longue des analogies de Neper, par l'analemme. " (*Hist. de l'Astr. mod.*, t. II, p. 89).

(**) Id., t. II, p. 85.

Trigonometria Britannica sive de dimensione triangulorum libri duo. Quorum prior continet Constructionem Canonis Sinuum Tangentium et Secantium, una cum Logarithmis Sinuum et Tangentium... A clarissimo... Viro Domino Henrico Briggio... Posterior vero usum sive applicationem Canonis in Resolutione Triangulorum tam Planorum quam Sphaericorum... exhibet : Ab Henrico Gellibrand... Goudae. Rammasenius M.DC.XXXIII. In fol. Bibl. roy. de Belg. V. 4987. Lib. II, pars I, cap. II, pp. 62-63. Cette partie de l'ouvrage est de Gellibrand.

(***) Id., t. I, p. 531.

Joh. Kepleri Mathem. Caes. et Jacobi Bartschii Tabulae manuales logarithmicae ad calculum astronomicum, in specie Tabb. Rudolphinarum compendiose tractandum mire utiles. Ob defectum prioris Editionis Saganensis multum hactenus desideratae. Quibus accessit in hac Editione Introductio nova curante Joh. Casp. Eisenschmid P. E. M. D. Argentorati, Apud Theodoricum Lerse Literis Johannis Pastorii CIↃ.IↃ.CC. In-12. Bibl. de l'Observ. royal de Belg. La formule est l'objet de la 2e prop. de la section II de l'introduction, p. 32.

Les tables de Kepler et de Bartchius ont une histoire mouvementée dont il m'est impossible de dire ici un mot même en passant. J'engage le lecteur, que le sujet pourrait intéresser à consulter le t. VII des *Joannis Kepleri Astronomi Opera omnia, edidit Ch. Frisch* (Francofurti a M. Weyder et Zimmer, 1868. — De Logarithmis, proaemium editoris, pp. 295-315 ; et Appendix II, J. Bartschii tabulae logarithmicae, pp. 436-440).

pas été difficile de la trouver encore ailleurs, par exemple dans le *Speculum astronomicum* d'Adrien Romain (*) ou dans l'*Astrolabium* de Clavius (**). Mais la formule n'est ni de Romain, ni de Clavius, ni de Viète, ni d'aucun des autres auteurs nommés par Delambre. Je la lis déjà dans la *Geometria rotundi* de Thomas Finkius (***), ouvrage très curieux, très suggestif pour parler le langage d'aujourd'hui et qui est, on le sait, de huit ans antérieur à la plus ancienne des trigonométries citées ci-dessus, les *Triangulorum Geometriae libri quatuor* de van Lansberge (IV). Finkius, et cela mérite attention, donne la formule comme neuve et venant de lui (V). On peut le croire, car c'est un écrivain

(*) *Speculum Astronomicum sive organum forma mappae expressum : In quo licet immobili omnes qui in primo coelo, primoque mobili spectari solent motus, per canones ea de re conscriptos, planissime sine ullius regulae aut volvelli beneficio repraesentantur. Authore, a Romano, Equite aurato, Comite Palatino, Medico Caesareo : atque ad D. Joannis Novi Monasterii Herbipoli Canonico. Lovanii 1606.* In-4°. Liv. I, cap. IV, p. 22. Bibl. roy. de Belg. V. 4973 et 5125.

(**) *Christophori Clavii Bambergensis e Societate Jesu Astrolabium. Romae, M.D.XCIII.* Lib. I, lemm. 53, p. 267 ; ou bien : *Christophori Clavii Bambergensis e Societate Iesu Operum Mathematicorum tomus tertius. Moguntiae MDC.XI.* p. 123. Clavius donne d'ailleurs cette formule en d'autres endroits de ses œuvres.

(***) *Thomae Finkii Flenspurgensis geometriae rotundi Libri XIIII. Ad Fridericum secundum, serenissimum Daniae et Norvegiae regem, etc. Cum Gratia & Privileg. Caes. Majest. Basileæ, per Sebastianum Henricpetri.* A l'avant dernière page : *Basileae per Sebastianum Henricpetri, anno salutis humanae, M.D.LXXXIII. mense augusto.* In-4°. Liv. X, n° 14, p. 292. Bibl. roy. de Belg. V. 4974.

(IV) J'ai dit plus haut (p. 116) que la première édition est de 1591.

(V) En cet endroit de sa *Geometria rotundi*, Finkius traite précisément le problème à l'occasion duquel nous venons d'écrire cette note : Résoudre un triangle dont on connaît deux côtés et l'angle qu'ils comprennent. Il rappelle d'abord la première solution, que nous avons exposée plus haut (pp. 98 et 98). On peut la voir dans Regiomontan, dit-il. Mais, ajoute-t-il aussitôt : Elle est " nimis laboriosa et taediosa. Quare ex superiori doctrina deducto calculo „ brevi et facili eoque novo fruere. „

Ce calcul neuf et facile consiste à employer la formule

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\,\frac{1}{2}\,(A+B)}{tg\,\frac{1}{2}\,(A-B)}$$

Voici d'ailleurs l'énoncé textuel de Finkius (*Geom. Rot*, p. 262) :

" Ut semissis summae crurum ad differentiam summae semissis, alteriusque „ cruris, sic tangens semissis anguli crurum exterioris ad tangentem anguli quo „ minor interiorum semisse dicti reliqui minor est, aut major, major. „

Ce qui veut dire en langage moderne et en supposant pour fixer les idées que l'on a $A > B$

$$\frac{\frac{1}{2}\,(a+b)}{\frac{1}{2}\,(a+b)-b} = \frac{tg\,\frac{1}{2}\,(180^\circ - C)}{tg\,[\frac{1}{2}\,(180^\circ - C) - B]} = \frac{tg\,\frac{1}{2}\,(180^\circ - C)}{tg\,[A - \frac{1}{2}\,(180^\circ - C)]}.$$

singulièrement délicat et consciencieux, citant toujours les auteurs auxquels il fait des emprunts (*).

(28) Simon Stévin avait dit antérieurement avec plus de précision que Coignet, qu'il y a " Deux reigles générales des triangles de ceste proposition.

„ I. Reigle.

„ Si le costé cognu touchant l'angle cognu, fut plus grand que l'autre cognu, „ et que l'angle incognu touchant le costé incognu, fut par l'opération trouvé „ oblique, il y aura deux solutions.

„ II. Reigle.

„ Tous les autres triangles de ceste proposition, n'ont qu'une conclusion. „

Voyez : *Memoires mathematiques... descrit premierement en Bas-Alleman par Simon Stevin de Bruges, translaté en François par Jean Tvning... A Leyde, chez Jean Paedts Jacobsz. CIↃ.IↃ.CVIII.* In-fol. (4 tom. en 1 vol. dont le premier est imprimé en 1608 et les trois autres en 1605. — T. I. Deuxiesme livre de la Cosmographie, des triangles plats, p. 152). Bibl. roy. de Belg. V. 4822[1] ; ou bien : *Les Œuvres mathematiques de Simon Stevin de Bruges...* par *Albert Girard Samielois... A Leyde, chez Bonaventure et Abraham Elsevier... CIↃ.IↃ.CXXXIV.* In-fol. II, p. 16. Bibl. roy. de Belg. V. H. 8039 et V. 4822.

Malgré la magnifique étude consacrée à la bibliographie des œuvres de Stevin dans le tome XXIII de la 1re série de la Bibliotheca Belgica par le bibliothécaire en chef de la Bibliothèque de l'Université de Gand, on rencontre, même chez les écrivains les plus autorisés, de si étranges erreurs à leur sujet, qu'on me pardonnera une courte digression.

Il existe quatre éditions plus ou moins complètes des œuvres du Géomètre brugeois. Les trois premières parurent simultanément à Leyde de 1605 à 1608. Ce sont :

Les *Wisconstige Gedachtenissen... Inde Druckerye van Jan Bouwensz.* Bibl. roy. de Belg. V. H. 8037. On peut la regarder comme l'édition originale de l'auteur, quoiqu'un grand nombre de traités n'y soient pas publiés pour la première fois, l'ayant déjà été antérieurement.

Les *Hypomnemata mathematica... Ex officina Joannis Patii.* Traduction de l'ouvrage précédent par Willebrord *Snellius*, à l'exception du *Liber quintus Geographiae, Limenheuretica* qui est de Hugo *Grotius*. Bibl. royal de Belg. V. 4821. Cette traduction est complète quoi qu'en dise Brunet dans son *Manuel du Libraire et de l'Amateur de Livres*, 5e éd., t. V, p. 535.

Les *Mémoires mathématiques...* Chez *Jean Paedts Jacobsz.* Traduction française par Jean Tuning d'une partie des *Wisconstige Gedachtenissen.*

(*) Thomas Fink, médecin et mathématicien, né à Flensburg le 6 janvier 1561, mort le 26 avril 1656, n'est guère connu aujourd'hui que pour avoir donné leurs noms aux tangentes et aux sécantes trigonométriques (Voyez Cantor. *Vorl. über Gesch. der Math.* 2e B. 2e Auflage, p. 604). Il mérite mieux cependant, car l'habitude qu'il a de citer ses sources, le rend souvent précieux dans les recherches historiques. Sa *Geometria rotundi* m'a fourni plus d'un renseignement que j'avais en vain cherché jusque-là ailleurs.

de 1632 et est dû à I. Ioen (*).

(30) Le sens du mot *être* a beaucoup varié et nous n'y attachons plus la signification que lui oignet.

Ce petit traité me pa devenu aujourd'hui d'un intérêt moins grand que les autres. Je pourrai er comme ouvrage du même genre publié aux Pays-Bas vers cette da *Praxis nova Geometrica per usum Circini* d'Adrien Metius. *Fra ex officina Vlrici Dominici Balck, Ordinum Frisiae et eorundem Ae typographi. Expensis Joannis Jansonii Bibliopol. Amstelrodami, MXIII.* In-4°. Bibl. roy. de Belg. V. H. 5133. L'auteur y dit dans l'tion (p. 3 n. ch.) qu'il s'est inspiré à la lecture d'un opuscule de Galila eu son heure de célébrité et qui a pour titre : *Du compas géométrig*

(31) L'*s* suivi d'un *t* ent surmonté d'un accent circonflexe ou relié par un trait à la lettre *t*; nvons *st*.

L'*u* est souvent affeaccent; nous écrivons *u*.

L'*m* et l'*n* redoublés ordinaire remplacés par un *m* ou une *n* unique surmontés d'un trait occent; nous écrivons *mm* et *nn*.

La syllabe *que* à la nots s'exprime par *q* avec un accent; nous écrivons *q;*.

Enfin la syllabe *mem* des mots s'abrège en *mt* avec un accent; nous écrivons au long : *mem*

(32) Bibliotheca Scri Graecorum et Romanorum Teubneriana.

(Math. 1078) : *Table desngentes & secantes, selon le raid de 100.000 parties.., par Albert Girarn. A La Haye, Iacob Elzevir, 1627.* In-12. Edition rare, qui n'est pas menpar Bierens de Haan (*Bibliog. neerland.*, dans le Bullet. de Boncompagn, 1882, p. 620). Son intérêt est cependant purement bibliographique, part le titre et quelques préliminaires, ce n'est qu'une reproduction paage de l'édition de 1626. Dans ces deux éditions, les notations sont expli I_9 r°.

(*) *Tabvlae sinvvm tm et secantivm... door Fr. van Schooten, gecorrigeert, ende int cort bij gd'ontbindige der sphaerischer triangulen... door I. I. Stampioen, de Jongotterdam* by de Weduwe van Matthys Bastiaensz. Sans date au titre princis la seconde partie, *Kort by-voeghsel der sphaerischer Triangulen. II. Stampioen Iuniorem; mathematicum,* porte l'indication : *tot Rotter32.* In-12 (Bibl. de l'Univ. de Gand. Math. 1076). Les notations sont explu f° Av de cette dernière partie; elles sont très intéressantes et méritention.

TEXTE DE COIGNET

f° 2 r° †

TRAICTÉ DES SINUS, CONTENANT VN ABREGÉ POUR FAIRE LES TABLES DES SINUS, PAR LAIJDE DESQUELLES SE FERONT LES TABLES DES TANGENTES, ET SECANTES

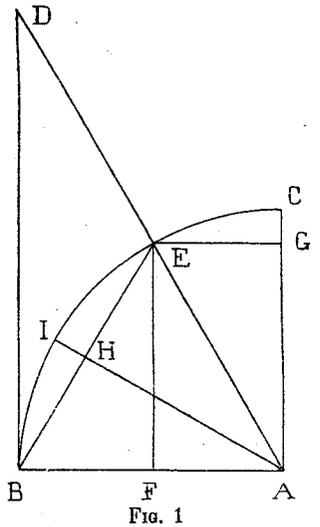

Fig. 1

Notez

L'arc B.I.E, est de 60 degrez. Sa chorde est la ligne droicte B.H.E, dont la moitie est B.H, ou E.H, — laquelle est sinus de l'arc E.I, ou B.I, qui sont de 30 degrez dont sensuijt que les lignes E.G, E.H, et B.H, sont entre elles egalles

Sur le quart, du cercle A.B.C, est notté l'arc B.E, de 60 degrez duquel arc est le

Sinus la perpendiculaire E.F,
Tangente la perpendi..... B.D,
Secante la hijpothenuse... A.D,
Sinus versus la saëtte... F.B,
Sinus de son complement... E.G,
Chorde de larc B.I,E. est... B.H.E,

f° 2 v° Le commencement de la supputation des tables de sinus selon Ptolomee en son Almageste (1), est qu'on sçache trouuer en vn cercle (dont le diametre est cognu) les costez de ses ensuijuantes Figures regulieres, assçauoir du

Decagone, ou Figure de 10. costez egaulx,
Hexagone, ou Figure de 6. costez egaulx,
Pentagone, ou Figure de 5. costez egaulx,
Tetragone, ou Figure de 4. costez egaulx,
Trigone, ou Figure de 3. costez egaulx,

Par lesquelz costez nous aurons les chordes des arcs de 36 degrez, de 60 degrez, de 72 degrez, de 90 degrez et de 120 degrez. et la moitie de ces costez ou chordes seront les sinus de

18
30
36 } degrez
45
60

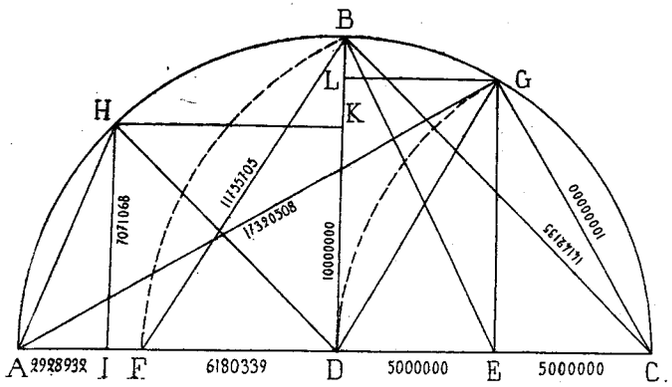

Fig. 2

Soit le mijdiametre A.D, ou D.C, lequel est partij par moitie egallement en E, la longueur E.F, est egalle auecq; la ligne E.B, et sera B.F, costé du Pentagone. Item soit la chorde C.G, egalle auecq le mijdiametre du cercle C.D, sera doncques C.G, coste du Hexagone, et B.C, du Tetragone et la ligne A.G, coste du Trigone. Et si le quart du cercle A.B, est partij egallement en H, seront, H.I, et H.K, egaulx

f° 3 r° Or si on presupose que le mijdiametre D.B, est de 10 000 000 parties egalles on trouuera pour le coste du

Decagone, D.F, 6180339, chorde de 36 degrez
Pentagone, B.F, 11755705, chorde de 72 degrez
Hexagone, C.G, 10000000, chorde de 60 degrez
Tetragone, B.C, 14142135, chorde de 90 degrez
Trigone, A.G, 17320508, chorde de 120 degrez

La moitie de ces chordes seront les sinus de la moitie de leurs arcs, et par ainsij aurons les sinus des arcs ou degrez,

Sinus de degrez
18 — 3090169
30 — 5000000
36 — 5877852
45 — 7071068
60 — 8660254

Et a cause que le quarrez du mijdiametre D.H, est double au quarré de la perpendiculaire H.I, laquelle est sinus de l'arc de 45 degrez, il est certain que H.I, est aussij 7071068, comme la moitie de B.C,

On pourroit aussij tirer la chorde A.H, laquelle sera costé de l'octogone : or dautant que D.I, est aussij de 7071068, il est certain que le sinus versus de 45 degrez qui est la ligne A.I, sera de 2929932, et la perpendiculaire H.I, est 7071068. ergo sera la chorde A.H, 7653668, dont la moitie est 3826834 (*), lequel sera le sinus de 22 degrez et 30 minutes, ettc^a.

10 000 000
7 071 068
2 928 932

f° 3 v° Or pour trouuer les sinus des autres degrez et minutes en començant d'une minute iusques a la fin dung quart de cercle qui est iusques au sinus de 90, degrez lequel est 10000000, et on le nomme le sinus entier ou totale. Lordre en cela auons comprins en huict Problemes geometricques, mais pour faire leurs demonstrations sera necessaire de presuponer trois diuerses propositions geometricq; lesquelles lon nomme Lemmata, et sont propositions lesquelles ne seruent a autre chose que pour demonstrer les Problemes qui nous seront necessaires pour construijre la supputation de ces tables de Sinus

La premiere est Ptolomee (2), et dict

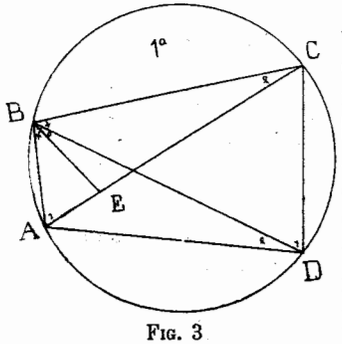

Fig. 3

Soit vn parallellogramme descrit dans vn cercle signe des lettres (**), A,B,C,D, et que dans ce ▭ soyent les diagonalles. Il faut demonstrer que le parallellogramme ▭, compris des diagonales A.C, et B.D, est si grand que les deux rectangles compris des costez oposites de A.B, et C.D, auecq celuij de B.C, et A.D, lequel veut dire que le multiplicat de la diagonale A.C, en B.D, faict autant que multipliant A.B, en C.D, et B.C, en A.D, ettc^a.

(*) *Codex :* 382834. — (**) *Codex :* lrês.

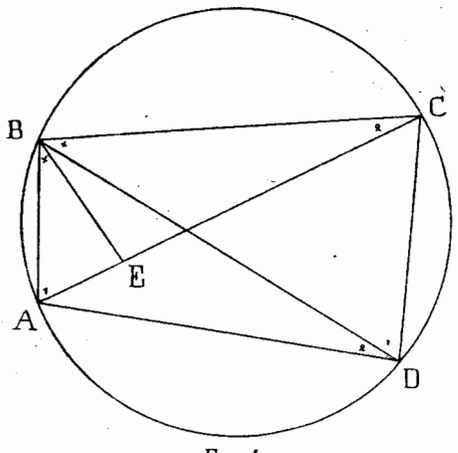

Fig. 4

La demonstration de ceste proposition assumee de Ptolomee est facille et ce faict en ceste maniere

Du point B, est tiree la ligne B.E, faisant langle A.B.E, egal auecq langle D.B.C, et ainsij seront les deux triangles A.B.E, et D.B.C, equiangles, et pour cela ont ilz les costez proportionaulx, sera doncques que comme se tient A.B, auecq A.E, ainsij B.D, a C.D,

Sont aussij les triangles B.E.C, et B.D.A, semblables pour estre de mesme angles et sera come B.C, a E.C, ainsij B.B, a A.D,

f° 4 r° Mais B.D, en A.E, et B.D, en E.C, est tant que B.D, en toute la ligne Diagonale A.C,

Dont sensuijt que A.B, en C.D, et B.C, en A.D, font ensemble tant que B.D, en A.C, lequel estoit a demonstrer

Nottez

Pour abreger l'ouuraige auons obmis les propositions d'Euclide (3) du 3e liure, que les angles marques, 1 et 1, Item 2 et 2, sont egaulx lung a lautre dont prouient Legalité des angles des triangles que disons estre semblables, ergo de costez proportionaulx par la 4e du 6. des Elements (4) :

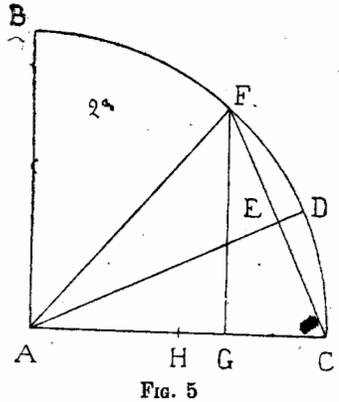

Fig. 5

La 2e est de Johan de Mont roijal (5)

En vn quart dun cercle est ce que le sinus de quelque arc, est le milieu proportionel entre la moitie du demij diametre et le sinus versus du double dudit arc. Soit larc donné C.D, son sinus est la droicte C.E, larc double est C.F, dont le sinus est F.G, et son sinus versus est G.C. Et soit le demij diametre A.C, partij egallement en H, Johan de montroijal dict que la ligne C.E, est milieu proportionel entre les lignes C.H, et C.G,

Notre (*) demonstration

Les deux triangles rectangles C.G.F, et C.E.A, ont langle F.C.A, (**) comun, ergo sont equiangles, dont sensuijt que sera comme A.C, a C.E, ainsij C.F, a C.G, mais de A.C, et C.F, prenons leurs moitiez et sera comme C.H, a C.E, ainsij C.E, a C.G, ou bien direz que C.H, C.E, C.G, sont trois lignes en continuelle proportion. ergo C.E, sinus de l'arc C.D, est milieu proportionel, entre C.H, moitie du demij diametre et C.G, qui est sinus versus de larc double C.F, que nous failloit demonstrer

f° 4 v° La 3e est de Michiel Coignet (6),

Soit vng triangle descrit en vn cercle A.B.C, dont la perpendiculaire est B.D, et le diametre du cercle est B.E. Lon demonstrera que le rectangle des Jambes A.B, et B.C, est egal au ▭ de la perpendiculaire B.D, et du diametre B.E. Cest a dire qu'en multipliant les Jambes A.B, et B.C, l'ung par lautre quil en viendra tant qu'en multipliant la perpendiculaire B.D, par le diametre B.E,

Demonstration

Aijant tiré le diametre B.E, lon tirera la ligne de E, en A, les triangles rectangles B.D.C, et B.A.E, seront equiangles, a cause que les angles C, et E, sont egaulx. Et par consequent auront les costez proportionaulx, seront doncq; les 4 lignes ensuijuantes en proportion semblable asscauoir comme

B.C, a B.D, ainsij B.E, a A.B.

Le multiplicat doncques de B.C, en A.B, sera autant que de B.D, en B.E, ce que nous failloit demonstrer

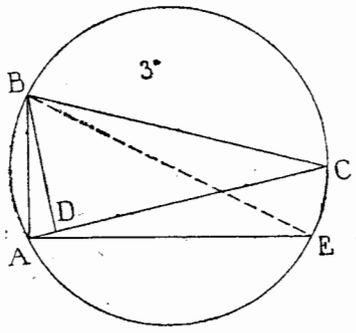

Fig. 6

Sensuijuent les huict Problemes qui nous montreront la practicq; pour calculer les Tables de sinus (7)

(*) *Codex :* Nre. — (**) *Codex :* + en C.

Le premier Probleme

Aijant trouué le sinus de quelq; arc, comment on trouuera le sinus de son complement

Sensuijt la practicq; en ceste reigle

Ostez le quarré du sinus dudict arc, du quarre du sinus total; et la racinne quarree de la reste, sera sinus du complement dudict arcq

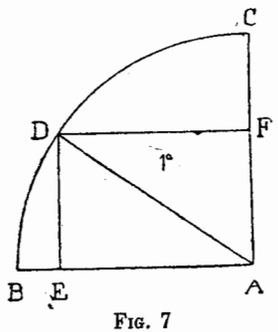

Fig. 7

Ceste figure sert pour la Demonstration geometricq;

Exemple

f° 5 r° Soit larc donne de 18 degrez dont le sinus est 30901, estant le sinus total 100000, le ▢ de 30901, est de 954871801, lequel estant ostez du quaré ‖ 10000000000, la reste sera 9045128199. — dont la racinne quarree est 95105, qui est sinus de 72 degrez, car autant est le complement des 18 degrez quon donnoit

Autrement par la 36e. du 3e. d'Euclide (8)

Soit A.B, 30901, sinus de langle C, de 18 degrez, il nous faut auoir la ligne A.C, qui est sinus de langle B de 72 degrez estant C.B, 100000 —

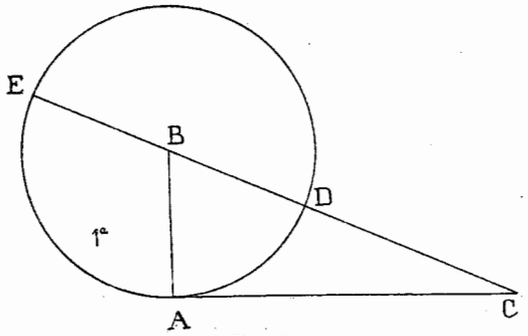

Fig. 8

La Reigle est

Multipliez la somme de 30901 et 100000 auecq; la difference de ces nombres et le produict donnera le quarre du Sinus du complement

100000	—	100000
30901		30901
130901	—	69099
69099		

9045128199 dont la racine quarree est 95105 pour la ligne A.C; laquelle est sinus du complement. cest de 72 deg.

Le second Probleme

Ayant trouué les sinus de deux diuers arcs, et auecq; cela les sinus de leurs complementz, comment lon trouuera la chorde ou soubstence de larc de leurs differences

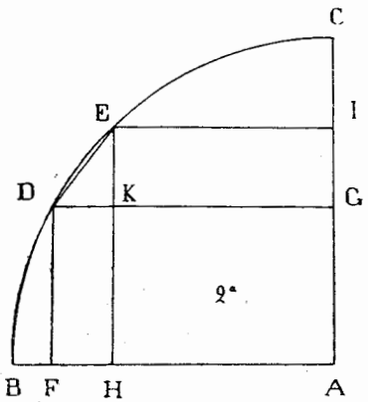

Fig. 9

Reigle

Le quarre de la difference des sinus des arcs donnez, adiousterez auecq le quarré de la difference des sinus de leurs complementz, et la racinne quarree d'icelle somme sera la chorde qu'on cherchoit

Exemple

Soijent les deux arcs 18 degrez, et 30 degrez, dont les complementz sont 72 degrez et 60 degrez

Sinus de 30 degrez	50000	Sinus du complement 72 degrez ⊥	95105
Sinus de 18 degrez	30902	Sinus de 60	86602
	19098		8503
	19098		8503
	364733604		72301009
	72301009		

Somme 437034613. Dont la racinne est 20905, qui sera la chorde de 12 degrez

f° 5 v°

Corollaire

Par cecij lon trouuera le sinus de la moitie de larc qui est entre deux arcs donnez. et ainsij 10452 (la moitie de la corde 20905) est le sinus de 6 degrez :

Le 3ᵉ Probleme

Aijant trouué le sinus de quelq; arc, coment on trouuera le sinus de sa moitie

Cest a dire, par exemple, si on a le sinus de 30 degrez coment on trouuera le sinus de 15 degrez

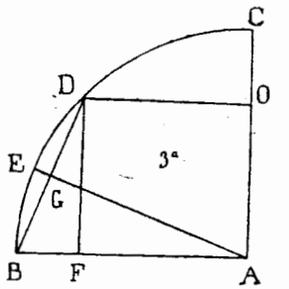

Fig. 10

De ceste figure on prendra la demonstration de la reigle :

La reigle

Adioustez le quarré du sinus de votre (*) arc donné, auecq le quarre de son sinus versus, de ceste somme cherchez la racinne, et la moitie dicelle racinne sera le sinus requis

Exemple

Soit larc donné de 30 degrez, et son sinus 50000, le sinus de son complement est 86602, dont sensuijt que sinus versus desdictz 30 degrez est 13398, leurs quarrez sont 2500000000, et 179506404. leur somme sera 2679506404, dont la racinne quarree est 51764. et la moitie dicelle racinne 25882, est sinus de 15 degrez

Autrement par la 2ᵉ, proposition precedente de Johan de Montroijal

Multipliez le sinus versus dudict nombre, qui en cest exemple est 13398, par la moitié du Total qui est 50000, vienent 66990000, et la racine quarree sera 25882, comme dessus. La demonstration de la premiere reigle se comprendra par la figure de ce 3ᵉ probleme, et la demonstration de Montroijal est mise cij deuant en la 2ᵉ proposition

f° 6 r°

La 4ᵉ. Probleme

Aijant trouué le sinus de quelq; arc coment on cherchera le sinus de son double

Cest a dire si lon at le sinus de 18 degrez coment on trouuera celuij de 36 degrez

La Reigle

Multipliez le sinus de larcq; proposé auec le sinus de son complement, et le produict partirez (**) par le sinus total, le quotient se doublera qui rendra le sinus quon cherchoit

Exemple

Soit larc A.B, de 18 degrez son sinus sera A. F, de 30902. et E.F, sinus de son complement est 95105, il faut trouuer C.D, qui est le

(*) *Codex*. Vre. — (**) *Codex* : partirez, partirez.

Figure de la demonstraôn (9)

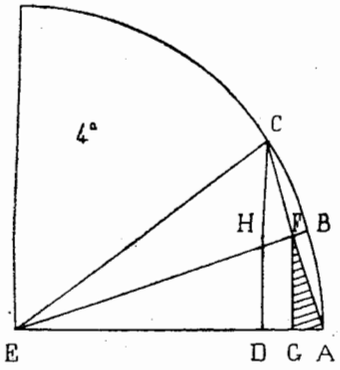

Fig. 11

Il est comme
A.E, E.F, F.A, F.G,
Car les triangles rectangles E.F.A,
et F.G.A, sont equiangles.

double de F.G, multipliez donc 30902 par 95105, le produict partirez par le sinus total 100000. le quotient sera 29389 pour F.G, ou D.H, son double est 58778 pour C.D, qui sera le sinus de 36 degrez

La Demonstration se void en la figure en laquelle les deux (*) triangles rectangles A.F.E, et F.A.G, sont equiangles et partant sont les lignes A.E, E.F, F.A, F.G, en proportion ettcª.

Autrement selon la precedente 2ᵉ proposition (**) de Johan de Montroijal

Le quarré de larc donne partirez par la moitie du sinus total qui est 50000, il en prouiendra le sinus versus de larc proposé doublé

Nottez que la premiere reigle est plus facille

Le 5ᵉ. Probleme

fº 6 vº Quand les sinus de deux diuers arcs sont donnez comment on trouuera le sinus de leur somme

Comme si on disoit iaij les sinus de 6 degrez et de 12 degrez. donnez moij le sinus de 18 degrez

La Reigle

Multipliez le sinus du premier arc, auecq le sinus du complement du 2ᵉ. arc, et aussij multiplierez le sinus du 2ᵉ. arc, auecq; le complement du premier arc, la somme de ces deux produict partirez par le sinus total, et le quotient sera le sinus qu'on cherchoit

Exemple

Soijent les arcs 12 degrez le premier, et 6 degrez le second et seront leurs sinus comme sensuijt

(*) *Codex :* le deux.
(**) *Codex :* propotition.

Le sinus de 12 degrez est 20791, et de son complement 97815.
Le sinus de 6 deg. est 10453, et de son complement 99452

20791	10453
99452	97815
2067706532	10224 60195
	20677 06532
par 100 000 (*) =	30901|66727

facit 30901. qui est sinus de 18 degrez

Demonstration

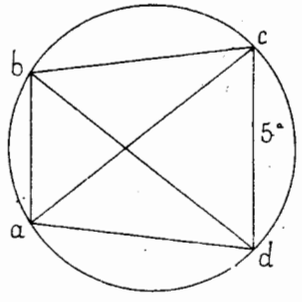

Fig. 12

Soit *a.b,* sinus de 12 degrez. son complement *a.d,* Item *b.c,* sinus de 6, son complement *c.d,* Le sinus total est *b.d :* les quattres costez du quadrangle sont cognus auec le diamètre *b.d,* sera aussij par la premiere proposition de Ptolomee trouué *a.c,* sinus de 18 degrez

La suputation prend par tout les moities, cest les sinus en lieu des cordes, et le mijdiametre pour lentier

Le 6ᵉ. Probleme

Aijant les sinus de deux arcs diuers, coment on trouuera le sinus de larc de leurs differences (10)

fº 7 rº Ce probleme est contraire au precedent et monstre la maniere qu'en aijant pour exemple le sinus de 18 degrez et de 12 degrez. comment on trouuera celuij de 6 degrez

La Reigle

Multipliez le sinus du premier arc, auecq le sinus du complement du second, et aussij le sinus du 2ᵉ. arc, auecq; le sinus du complement du premier. Tirez le moindre produict du plus grand et la reste partirez par le sinus total, et le quotient sera le sinus qu'on cherche

(*) *Codex :* 10 000.

Exemple

Sinus de 18 deg : est 30901, et sinus de son complement 95105
Sinus de 12 deg : est 20791, et sinus de son complement 97814

30901	20791
97814	95105
30225 50414	1977328055
19773 28055	

par 100000 = 10452|22359 facit 10452. pour le sinus de 6 degrez

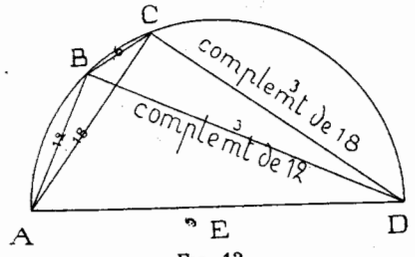

Fig. 13

Ceste figure sert pour la demonstration

Les diagonales B.D, et A.C, sont cognues aussij les trois costez A.D, total, aussij A.B, et C.D, lon cherche B.C,

Probleme 7e

Aijant le sinus de deux diuers arcs coment on trouuera le sinus de larc qui est iustement au mitant

Comme si nous donnoit le sinus de 12, et de 18 degrez, coment on trouuera le sinus de 15 degrez

Reigle

Par le precedent 2e. Probleme, on cherchera la chorde de larc (*) de leur difference, et la moitie (**) sera le sinus de lequation. Come si par exemple les arcs donnez fussent 12 et 18 degrez, on cherchera la chorde de 6 degrez qui sera 10467, sa moitie est 52331 1/2, sinus de 3 degrez. Or aijant le sinus de 12 degrez et de 3 degrez, on trouuera facillement le sinus de leur some quest de 15 degrez, et cela par le precedente 5e. Probleme.

fo 7 vo Le 8e. Probleme

Si le sinus par exemple de 24 degrez et de 30 degrez sont donnez comment on trouuera le sinus de 36 degrez, ou de 18, car de

(*) *Codex :* la larc.
(**) *Codex :* moitie, moitie.

24 a 30, est 6, ergo lon veut auoir le sinus de 6, plus que 30, ou de 6, moins que 24 ettca. loperation se peut facillement faire selon les instructions des precedents Problemes

Nottez

Ces deux derniers Problemes, ne sont pas en grand vsaige aupres des Canonistes qui vueillent calculer les Tables de sinus, pour estre fort longues a practicquer

Conclusion des. 8. precedent Problemes

1a Le premier monstre a trouver le sinus du complement de tout arc, quand dudict arc son sinus est donné. Comme sil nous est donné le sinus de 50 degrez. ce Probleme monstre a trouuer celuij de 40 degrez ettca.

90	90
50	56
40	34

2a Le second probleme monstre a trouuer la chorde de larc de la difference quil ij a entre deux arcs donnez auec leurs sinus. Comme pour Exemple si les sinus de 20 et de 30 degrez fussent donnez, comment on trouuera la chorde de 10 degrez, dont la moitie sera sinus de 5 degrez ettca.

3a Le 3e Probleme, monstre a trouuer le sinus de la moitié dun arc donné auec son sinus, et par ainsij si le sinus de 18 degrez est donné, on trouuera celuij de 9 degrez, et par celuij de 9 degrez celuij de 4 degrez et 30 minutes, et par consequent celuij de 2 degrez et 15 minutes ettca.

4a La 4e. monstre a trouuer le sinus du double de larc donnez et ainsij ayant celuij de 12, on trouuera celuij de 24 degrez, et par celuij de 24 celuij de 48 degrez ettca.

5a La 5e. monstre a trouuer le sinus de la somme de deux arcs donnez auecq; leurs sinus

Et ainsij par ce probleme on pourra trouuer le sinus de, 50 degrez, quand ceulx de 30, et 20 degrez seront donnez ettca.

fo 8 vo 6e Le 6e. Probleme monstre a trouuer le sinus de larcq; que le plus grand arc excede le moindre quant iceulx arcs auecq; leurs sinus sont donnez. Et auecq ce Probleme lon trouuera le sinus (par exemple) de 20 degrez quand celuij de 50, et de 30 degrez sont donnez ettca.

7e et 8e Le 7e. et 8e. Problemes sont difficilles et les auons cij dessus assez explicquez ettca.

Pour trouuer le sinus d'un seul degrez
et d'une seulle minute

Quand nous auons cij deuant monstre, selon la doctrine de Ptolomee, de trouuer les sinus de 18, de 30, de 36, de 45, et de 60, degrez, diceulx selon le 2e. et 3e. problemes on trouuera ceulx de

12 degrez	9 degrez
6 degrez	4 degrez 30 minutes,
3 degrez	2 degrez 15
1 degrez. 30, m,	1 degrez 7 $^1/_2$
45, m,	
22 $^1/_2$ minutes	

Item par le 5e. probleme nous trouuerons les sinus de 34 degrez 30 minutes, lequel procede de 30 degrez, et de 4 degrez, 30 minutes

Depuis par le 6e. probleme aijant les sinus de 34 degrez, 30, (*) et de 22 $^1/_2$ minutes, on trouuera celuij de 34 degrez 7 $^1/_2$ minutes

Depuis nous monstrerons la maniere de trouuer le sinus de $^1/_2$. minute et d'une minute entiere

Et aijant le sinus de 34 degrez 7 $^1/_2$ minutes, et aussij de $^1/_2$ minute : cela nous rendra le sinus de 34 degrez et 8 minutes

34..... 8
17..... 4
8.....32
4.....16
2..... 8

Par ceste subdiuision trouuerons le sinus de 2 degrez et 8 minutes, lequel par le 6e. nous rendra de 34 degrez et 8 minutes, et de deux degrez 8 min, le sinus de 32 degrez iuste, et par consequent :

f° 8 v° Lon pourra aussij facillement par le moijen du 36e. et 32e. degrez trouuer le sinus de deux degrez, et ainsij celuij d'ung degrez

32
16
8 } Degrez
4
2

ergo. 1 degrez aura son sinus

(*) *Codex :* 36.

Mais si lon veut trouuer le sinus dune minute, et ainsij aussij d'une seconde lon fera cela par le sinus de 45, 22 $^1/_2$, 11 $^1/_4$, 5 $^5/_8$, 2 $^{13}/_{16}$, 1 $^{13}/_{32}$ et $^{45}/_{64}$ d'un degrez, or come le sinus de

degrez, 12 est	2079117
6 degrez est	1045385
3. deg : est	523360
1. deg : 30 m : est . .	261769
45. m, ...	130896
22 $^1/_2$. min . .	65449
11 $^1/_4$. min, . .	32724
5 $^5/_8$. min . .	16362

Et ainsij par consequent sera le sinus de $^{45}/_{64}$ d'ung degrez 2045 et plus a raison que le sinus total est 10000000, mais quant on le prend plus curieusement il sera bien 2045 $^1/_4$

Or, a cause quil nij a point de difference sensible, on dira

$^{45}/_{64}$ . . . 2045 $^1/_4$ . . . 1, ou bien direz
45 . . . . 2015 $^1/_4$ . . . 64, facit 29088 $^{82}/_{100}$ lequel seroit 2908882, a 10000000 le total

Nottez (11)

Il ij a vne tres singuliere practicq; trouuee par la reigle. D. Algebre, laquelle monstre que si on at quelque sinus, dun certain arc, ou nombre de degrez. comment on trouuera le sinus de son double, triple, quadruple, quintuple ettca. et la practicq; est comme sensuijt

On fera vne progression Geometricq; dont le premier nombre sera la moitie du total, asscauoir 5000000, le 2e. nombre sera le sinus de larc donné. et ferez apres comme par exemple demonstrerons :

f° 9 r° Soit qu'auons le sinus de 2 degrez, et voulons auoir le sinus de 4, 6, 8 et 10, degrez

Le sinus de 2 degrez est 348995
Dont sensuijt la progression (12)

5000000	—	—	1 ... o
348995	—	—	2 ... x
24359 $^1/_2$	—	—	3 ... ξ
1700 $^1/_4$	—	—	4 ... η
118 $^2/_3$	—	—	5 ... ξξ
8 $^1/_4$	—	—	6 ... ξη

Pour doubler

Le premier prendrez deux fois, de la some osterez le 3e. et la reste sera sinus du complement

Exemple

5000000
5000000
10000000
24359 1/2
9975640 1/2. sinus de 86 degrez qui est complement de 4 degrez : double des deux degrez dont le sinus fut donné

Pour tripler

Le 2e. nombre prendrez trois foijs. dont osterez le 4e. et la reste sera sinus du triple de l'arc donné

Exemple

348995
3
1046985
1700 1/4
1045284 3/4 Sinus de 6 degrez

f° 9 v° Pour quadrupler

Le premier nombre, prendrez deux foijs, dont osterez quattre fois le 3e. et a la reste adiousterez le 5e. et il en viendra le complement du quadruple

Exemple

24359 1/2
p; 4
97438

5000000
5000000
10000000
97438
9902562
118 2/3 la 5e. progression
9902680 2/3, sinus de 82 degrez

Pour quintupler

Le 2e. nombre prendrez cincq; fois. dont osterez cincq; fois

le 4e. et a la reste adiousterez le 6e. nombre, et viendra le quintuple

348995
5
1744975
8501 1/4
1736473 3/4
8 1/4
1736482. sinus de 10 degrez

1700 1/4
5
8501 1/4

Linuention du contraire (assçauoir qu'en aijant le sinus de quelque nombre come de 30 degrez qui est 5000000) coment lon trouuera le sinus de son tiers qui seroit 10 (*) degrez, et de son quint qui seroit de 6 degrez : et par ainsij trouuer le tiers de 6 degrez lequel donneroit le sinus de 2 degrez, et des 10 degrez, trouuer le sinus de son quint lequel seroit aussij de deux degrez. et par ainsij on aura Incontinent (par le susdit 3e. probleme) le sinus de vn degrez : Et ainsij par le 5e. probleme, on pourra tousiours adiouster vn degrez. car aijant le sinus de 6 degrez et dung degrez, on aura celuij de 7 degrez. et de ceulx de 10 degrez et dung degrez on trouuera celuij de 11 degrez :

f° 10 r° Cest operation est fort difficille, et de peu dhommes studieux practiquee; Il nij a personne qui à monstré cecij que ludoff von Coelen ([13]), en son liure du cercle, mais fort obscurement et avecq grand trauail. Docteur Adrian Roman, en ha en son liure Intitulé([14]) Triumphus Nonagoni, mis des calculations pour ce faict la, mais pour dire le vraij, cest sottise de perdre son temps, a chose de si grand trauail, puis qu'on le peut trouuer plus facillement comme cij dessus auons demonstré

Sensuijt vne Praticq; pour examiner
si les tables de sinus sont bien calculees

Il faut sçauoir que partons les 90 degrez, en trois ternaires, dont les degrez qui sont du comencement du quadrant, iusques a

(*) *Codex :* io degrez.

30 degrez font le premier Ternere, de 30, iusques a 60 fond le second Ternere, et de 60, iusques a 90 degrez font le 3e. Ternere, ettca.

Premierement quand tous les sinus sont calculez iusques au 30e degrez auec leurs complementz qui sont de 60, iusques a 90. coment on pourra trouuer tous les sinus d'entre deux, cest depuis 30, iusques a 60, et cela par vne simple substraction

La Reigle (15)

Votre (*) arc donné tirerez et adiousterez au nombre de 60. et de ces deux nombres prouenans prendrez les sinus : et leurs difference donnera le sinus de votre (**) arc proposé

Exemple

Lon demande le sinus de 48. degrez

60	60	180
48	48	108
12	108	72
	72 — 9510565	
	12 — 2079117	

Vient pour le sinus de 48 degrez = : 7431448

f° 10 v°

Figure pour demonstrer le precedent Theoreme

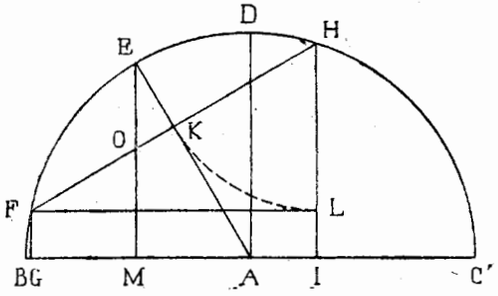

Fig. 14

Larc B.E, est de 60 degrez : et les arcs E.F, et E.H, sont chascun de 48 degrez : dont sensuijt que larc B.F, est seullement de 12 degrez. et l'arc B.D.H, de 108 degrez. que sont de C, en H, larc de 72 degrez. Je dis que si, L.I, est égal auec F.G, que H.L, est aussij sinus de 48 degrez. Veu que H.L, est egale auecq H.K, ou F.K, qui sont sinus de 48 degrez

(*) *Codex*. Vre.
(**) *Codex*. Vre.

Demonstration

Les triangles rectangles A.M.E, et H.L.F, sont equiangles, pour auoir les costez qui font les angles droictz paralleles : et leurs hijpothenuses se coupent a droict angle au point K

Le triangle A.M.E, at l'hijpotenuse, double a sa base, veu que son angle A, est de 60 degrez et E, de 30 degrez, ie dis doncques q ; l'hypothenuse F.H, est aussij double a la ligne H.L, dont sensuijt que H.L, et H.K, sont egalles, mais H.K, est sinus de 48 degrez, sera doncques. H.L, aussij sinus de 48 degrez. ce quil failloit demontrer ettca.

Pour trouuer les sinus des degrez du premier ternere, quand ceulx du second et tiers sont cognus. Cest de trouuer les sinus doiz le commencement, quand les autres de 30, iusques a 90, sont trouez

Reigle

Cest practicq ; est comme la precedente

Exemple

Je demande le sinus de 20 degrez

60	60	
20	20	
40	80	Sinus — 9848078
	40	Sinus — 6427877

Vient pour le sinus de 20 degrez 3420201

f° 11 r°

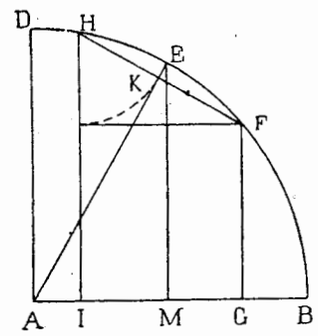

Fig. 15

Demonstration

Les arcs sont
B.E, degrez 60 —
E.F, et, E.H, degrez 20, ergo
B.F, degrez 40, son sinus F.G,
B.H, degrez 80, son sinus H.I,

Les triangles rectangles, A.M.E, et H.L.F, sont semblables comme dessus. Dont sensuijt que le costé H.F, est double, a la ligne H.L, et ainsij H.L, qui est la difference entre les lignes H.I, et F.G, est sinus de larc E.F. ettca.

cest a dire la perpendiculaire (*) B.E, Je dis q; comme A.D, se tient a C.D, ainsij A.B, a B.E,

A.D	C.D	A.B
8660254	5000000	10000000

faict 5773502, pour la perpendiculaire B.E, laquelle est la Tangente de 30 degrez et ainsij des autres

De la precedente demonstration et operation sensuijt la reigle
Pour trouuer de tout arc donné sa Tangente quand le sinus sera donné

Reigle

Multipliez le sinus de larcq; proposé par le sinus total, et le produict partirez par le sinus du complement, et le quotient donnera la Tangente de larc proposé

Des secantes ([17])

Item puisque du precedent arc B.C, la secante est l'hijpothenuse A.E, icelle trouuerez aussij facillement que le sinus du complement dudict arc, est cognu

f° 12r° Car comme se tient A.D, a A.C, ainsij A.B, a A.E,

Dittes doncq; pour reigle, quon partira le quarre du total, par le sinus du complement de larc proposé, et ainsij pour la Tangente, ie dis pour la Secante de 30 degrez viendra 11547004 :

Sensuijuent aulcunes reigles compendieuses
pour le faict des Tables des Tangentes, et Secantes ([18])

1ª Prenez la difference de deux Tangentes, dont les arcs font ensemble 90 degrez, et ceste reste vous donnera la Tangente de la reste d'Iceulx arcs

Et ainsij des Tangentes de 50, et 40 degrez, aurez la Tangente de 10 degrez

Tangente de 50 degrez	119175
Tangente de 40 degrez	83909
90	35266
Tangente de 10 degrez...	17633

2ª Item prenez la Tangente de quelq; arc, auecq la Tangente de la moitie de son complement et la somme fera la secante dudict arc

(*) *Codex.* Pirpendiculaire.

Soit larc donné de 23 degrez et 30 minutes, larc de la moitie de son complement sera 33 degrez et 15 minutes.

90
23 — 30
66 — 30
33 — 15

Tangente de 23 — 30 43481
Tangente de 33 — 15 65563
Soma 109044

Laquelle somme est la secante de 23 degrez et 30 minutes.

3ª Prenez la Secante, et Tangente de quelq; arc, et leur somme fera la Tangente de larc composé, de larc donné et la moitie de son complement

Soit larc donné 50 degrez. dont sera
La Secante. 155572
La Tangente 119175
Somma 274747

Sera doncques 274747, Tangente de 70 degrez. qui est nombre composé du mesme 50, et de 20, qui est la moitie de son complement

f° 12 v°

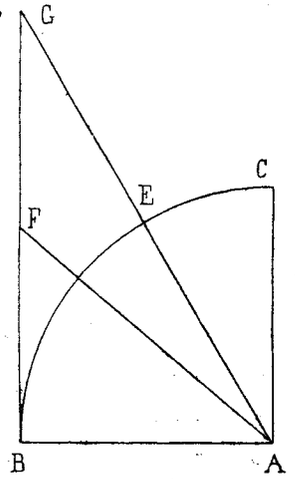

Fig. 17

Demonstration (19)

Soit larc donné B.D, dont la secante est A.F, et la Tangente B.F, or si on diuise larc du complement egallement en deux au poinct E, sera alors la tangente de larc B.E, la perpendiculaire B.G, laquelle sera egal aux deux droictes A.F, et B.F, car A.F, et F.G, sont egalles, a cause que Triangle A.F.G, est Isoscele, mais quil est Isoscelle,(*) apert en que langle G.A.C, est egale a langle B.G.A, les angles doncques F.A.G, et F.G.A, seront egaulx et aussij seront les costez A.F, et F.G, egaulx

Nottez

De ceste practiq; vient la reigle pour

(*) *Codex* : quil Isoscelle

faire les Tables des secantes, quand celles des Tangentes sont formees et composees. ettcª.

Reigle pour former la table des secantes
par laijde des Tangentes

Reigle

Prenez la Tangente de quelque nombre proposé, laquelle Tangente osterez de la tangente du nombre composé dudict nombre et de la moitie de son complement

Soit le nombre propose de 50 degrez, son complement sera 40, dont la moitie est 20, auecq; 50. font 70,

Tangente de 70 degrez 274747
Tangente de 50 degrez 119175
Secante de 50 degrez est . . . 155572

f° 13 r°

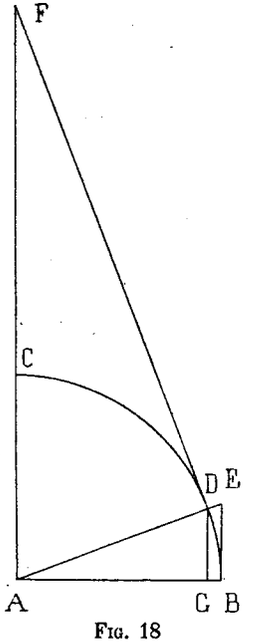

Fig. 18

Abreuiations sur la reigle de trois aux tables de Sinus (20)

1ª Si lon dict, comme le sinus se tient au total, ettcª. Dictes le total se tient a la secante du complement

Soit larc donne, 20 degrez 4 min'. dont le sinus est 34311 et la reigle soit telle, 34311... 100000... 8756, ettcª. prenez la secante de complement de 20 degrez 4. min'. qui sera 291449 et direz

100000 — 291449... 8756 ettcª.

Demonstration

Soit larc donné B.D, son sinus sera D.G, et la secante de son complement est A.F, et il sera comme G.D, a D.A, ainsij A.D, a A.F. ergo pour D.G, a A.D, prendrez A.D, a A.F, ettcª.

2ª Item si lon dict. la Tangente de quelq; arc, se tient au total, au lieu de ces deux nombres pour dire, le total se tient a la Tangente du complement dudict arc proposé

Soit larc propose, 21 degrez, 30 minutes. Dont la tangente est 39391

La reigle sera

39391... ad, 100000... combien ettc^a^.

Le complement de 21 degrez, 30 minutes est 253865, direz donques. 100000 — 253865, combien ettc^a^.

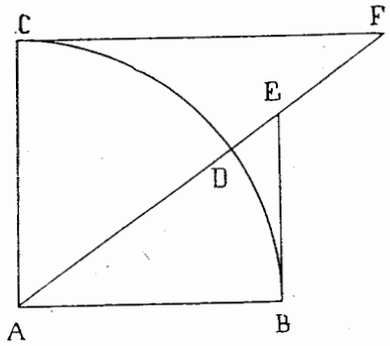

Fig. 19

Et en ces deux reigles viendra vn mesme quattriesme nombre, car les proportions de 39391, a 100000, et de 100000, a 253865, sont egalles et semblables

Demonstration

Soit larc proposé B.D, dont la Tangente est B.E, et la Tangente de son complement est C.F, or dautant que les (*) Triangles rectangles A.B.E, et A.C.F, sont equiangles, il est certain que come se tient B.E, a la tangente a A.B, total, ainsij le total A.C, a la tangente C.F, ettc^a^.

f° 13 r°

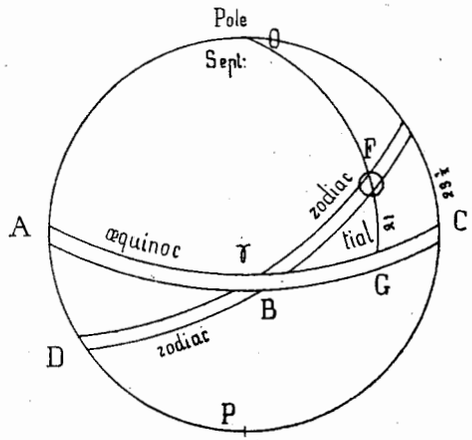

Fig. 20

Or (21) pour monstrer lusaige de ces deux precedentz abreuiations, prenons pour exemple, qu'au 25^e^. iour de maij lan 1612, Jaij trouue en Bruxelles a midij la haulteur du soleil dessus l'horizont de 60 degrez, et puis que la hauteur de l'Equinoctial, ij est de 39 degrez: il est certain q; la declination du soleil estoit de 21 degrez septentrionaulx, on demande en quel degrez du zodiac estoit le soleil

60
39
21

Entendrez en ceste Figure que le demij cercle Equinoctial est A.B.C, le demij zodiac, ou chemin du soleil D.B.E, — L'equinocte sera

(*) *Codex :* le

en B, et la plus grande declination en E. le pol du nort en O, et de Sud en P, (*) larc C.E, est de 23 1/2 degrez

Or prenons que le soleil au 25^e^. de maij estoit en F, le quart du cercle venant du pole O, et passant le soleil F, coupe le cercle equinoctial a droict angle, en G, et larc G.F, est la declination du soleil, laquelle en cest exemple est de 21 degrez la demande est combien sera larcq; B.F,

Dittes par la reigle de Sinus larc C.E, se tient au total de larc B.E, tout ainsij que le sinus de larc G.F, se tient a larc B.F,

E.C,	B.E,	F.G,
23 1/2	90	21
39875	100000	35838 : facit 89873

Mais notre (**) premiere abreuiation, dict qu'au lieu de sinus de 23 1/2 degrez pourrez prendre la secante de son complement 66 1/2 laquelle est 250784, et direz 100000... 250784... 35837. facit 89873, le sinus 89873 donne iustement 64 degrez pour larc B.F, et puisque 30 degrez donnent vn signe, il est certain que le soleil estoit au 4e. degrez du signe de Gemini ettc^a^.

♈. Aries 30
♉ Taur^s^. 30
♊ Gemi, 4
64

Acheué le 19e. D'octobre 1612
Par Michiel Coignet Mathematicien celebre de
leurs Altezes sere^mes^ (22).

(*) *Codex :* de en 'Sur en P.
(**) *Codex :* nre.

NOTES DU TEXTE

(1) *Claudii Ptolemaei opera quae exstant omnia Volumen I. Syntaxis mathematica edidit J. L. Heiberg, professor Hauniensis Pars. I, Libros I-VI continens. Lipsiae in aedibus B. G. Teubneri, MDCCCLXXXVIII.*

Dans cette édition, le 9e chapitre du livre I des anciennes éditions porte maintenant le n° 10. C'est dans ce chapitre que se trouvent les sujets indiqués ici (*).

Coignet ne nommant que Ptolémée, je rappellerai à ceux de mes lecteurs, qui seraient peut-être peu familiers avec les géomètres grecs, qu'avant Ptolémée, Euclide avait déjà donné la manière d'inscrire tous ces polygones réguliers dans la circonférence (**), mais que Ptolémée a cependant une solution originale et élégante de l'inscription du pentagone et du décagone. De nos jours elle semble, il est vrai, avoir disparu de l'enseignement, mais elle a été donnée si souvent ailleurs qu'il est superflu de la répéter une fois de plus ici. On la trouverait au besoin dans l'*Histoire de l'Astronomie ancienne* de Delambre (***).

(2) *Claudii Ptolemaei... ed. Heiberg, Synt. math.*, t. I, p. 36.

(3) *Euclid... ed. Heiberg...*, t. I, p. 220. C'est la prop. 21 du liv. 3.

(4) *Euclidis opera, ed. Heiberg. Elementa, vol. II, libros V-IX continens*, Lipsiae MDCCCLXXXVIII, p. 84.

(5) NOTE SUR DEUX OUVRAGES DE REGIOMONTAN. — En remplaçant sin vers 2A par R — cos 2A, la proposition que Coignet nomme théorème de Regiomontan, peut s'écrire :

$$\mathrm{Sin}^2 A = \tfrac{1}{2} R (R - \cos 2A)$$

Je la trouve dans les notes de Regiomontan sur Albategnius, et dans sa *Compositio tabularum sinuum*.

(*) T. I, p. 32.

(**) *Euclidis opera omnia. Ediderunt J. L. Heiberg et H. Menge. Euclidis elementa edidit et latine interpretatus est J. L. Heiberg Dr. Phil. Vol. I, libros I-IV continens. Lipsiae in aedibus B. G. Teubneri MDCCCLXXXIII.* Inscript. du carré, prop. 6, p. 284; du pentag., prop. 11, p. 298; de l'hexag., prop. 15, p. 312; du pentedec., prop. 16, p. 318. Quant au triangle équilatéral, son inscription à la circonférence est une conséquence immédiate de la prop. 2, p. 272.

(***) T. II, liv. III, ch. II, pp. 37-38.

Dans les *Claudii Ptolemaei opera*, édités par Heiberg, cette proposition se trouve : t. I, p. 32 et suiv.

J'aurai à nommer plusieurs fois dans la suite ces deux ouvrages, il est utile de les faire connaître un peu plus en détail.

Un mot cependant d'abord pour dire que Regiomontan n'a fait que réinventer une formule ancienne. Cantor nous apprend qu'elle était connue des Indiens (*) et le baron Carra de Vaux la signale dans l'Almageste d'Aboulwefa (**). Quant à Ptolémée, il a un théorème équivalent sur les cordes, qu'on peut écrire au long en notations modernes (***) :

$$\mathrm{Corde}^2 A = \tfrac{1}{2} (2R - \sqrt{4R^2 - \mathrm{corde}^2\, 2A}) \times 2R$$

En effet, en y faisant corde $A = 2 \sin \frac{1}{2} A$ et corde $2A = 2 \sin A$, on trouve :

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} A = R (R - \cos A);$$

mais une transformation de ce genre, ne pouvait que bien difficilement venir à la pensée d'un géomètre de l'époque de Coignet. En tous cas, personne n'eût alors regardé le théorème de Ptolémée et celui de Coignet, comme deux énoncés différents d'une seule et même proposition.

A. La première édition d'Albategnius. — Elle a été publiée en 1527, à Nuremberg, dans une assez mauvaise traduction latine de Platon de Tivoli et contient des notes nombreuses de Regiomontan. C'est un ouvrage fort intéressant par les curieux documents qu'il renferme, et dont la Bibliothèque de l'Observatoire royal de Belgique possède un exemplaire. En voici la description :

Continentur in hoc libro. Rvdimenta astronomica Alfragrani. Item Albategnivs astronomvs peritissimvs de motv stellarvm, ex obseruationibus tum propriis, tum Ptolemaei, omnia cû demonstratiôibus Geometricis & Additionibus Ioannis de Regiomonte. Item oratio introductoria in omnes scientias Mathematicas Ioannis de Regiomonte, Patauii habita, cum Alfraganum publice praelegeret. Eivsdem utilissima introductio in elementa Euclidis. Item Epistola Philippi Melanchtonis nuncupatoria ad Senatum Noribergensem. Omnia iam recens prelis publicata. Norimbergae anno M.D.XXXVII.

In-4° de 20 pp. non chiff. et 52, 180 pp. chiffrées au r° seul (26,90) :

Les 20 pp. non chiff. renferment :

L'*Epistola nuncupatoria Philippi Melanchtonis ad Senatum Noribergensem* (pp. 2-6).

L'*Oratio Iohannis de Monteregio habita Patauii in praelectione Alfragani. Hac oratione compendiose declarantur Scientiae Mathematicae et utilitates earum* (pp. 7-17).

L'*In Elementa Euclidis praefatio Joh. de Regiomonte* (pp. 18-20).

(*) *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 1e Band, 2e Auflage, Leipzig, 1894, p. 616.

(**) L'*Almageste d'Abû 'lwéfa Albûzdjani*, par M. le baron Carra de Vaux, publié dans le Journal Asiatique, 8e série, t. 19, Paris, p. 416.

(***) *Syntaxis mathematica*, éd. Heiberg, pp. 39-41.

Les 26 f° renferment les *Rudimenta Astronomica Alfragani*. Au bas du f° 26 r° : *Explicit Alfraganus. Norimbergae apud Joh. Petreium. Anno Salutis M.D.XXXVII.*

Les 90 f° renferment le *De Motu Stellarum d'Albategnius.*

Dans son *Histoire de l'Astronomie du moyen âge*, Delambre s'est servi, pour analyser Albategnius, de l'édition imprimée à Bologne en 1645, intitulée : *Albategnius de numeris Stellarum et motibus. Mahometis Albatenii, de Scientia Stellarum liber, cum aliquot additionibus Ioannis Regiomontani ex bibliotheca Vaticana transcriptus.* A la dern. p., Bononiae, M.DC.XLV. Typis Haeredis Victorii Benatii. Superiorum permissu. In-4° (Bibl. roy. de Belg., V. 5089).

La formule de Regiomontan forme l'objet d'une note ajoutée au chapitre III, " Additio Joannis de Monte Regio (*) ".

B. La Compositio tabularum sinuum de Regiomontan (**). — J'en transcris le titre, sur l'exemplaire de la bibliothèque de l'Université de Liége (***) :

Tractatvs Georgii Pevrbachii super propositiones Ptolemaei de Sinibus et Chordis. Item compositio Tabularum Sinuum per Ioannem de Regiomonte. Adiectae sunt et Tabulae Sinuum duplices per eundem Regiomontanum. Omnia nunc primum in utilitatem Astronomiae studiosis impressa. Norimbergae apud Iohan. Petreium anno Christi M.D.XLI. In-fol.; 53 pp. non ch. mais signées A.-G.

Dans le livre VIII de ses *Variorum de rebus mathematicis responsorum*, Viète, parlant des tables de sinus de Regiomontan, les apprécie en ces termes : " *Supputante Regiomontano bene, juste et accurate* (iv). " Il était loin d'être toujours aussi élogieux, quand il parlait de ce genre de travaux. Ainsi, dans le *Canon mathematicus*, il avait déjà eu l'occasion de parler des tables trigonométriques construites avant les siennes. Elles sont faites par des ravaudeurs, " rhapsodi " (v), dit-il fort peu respectueusement; ils n'ont pas de précision dans les calculs et laissent maladroitement s'accumuler les erreurs.

On lira donc peut-être avec intérêt une analyse du petit opuscule de Regiomontan.

Il se compose en tout de sept propositions que nous allons énoncer en langage moderne.

Prop. 1 (vi) :

$$\text{Cos A} = \sqrt{R^2 - \sin^2 A}$$

(*) Dans l'édit. de Nuremberg, 1537, f° 6 v°; dans celle de Bologne, 1645, pp. 9 et 10.

(**) Je résume ici la communication que j'ai faite aux Membres de la 1re section de la Société scientifique, à la session du 25 octobre 1900.

(***) Il est coté I, 78, 5, et est relié à la suite de l'*Instrumentum Sinuum seu primi mobilis* de Pierre Apien (Edit. de Nuremberg, 1541).

(iv) Paris, Mettayer, 1593, p. 40 v°; Éd. Schooten, p. 417.

(v) P. 17.

(vi) P. B_2 r°.

Prop. 2 (*) : Calcul des sinus *per Kardagas*. L'auteur a soin de définir lui-même ce mot étrange. " Kardaga, dit-il, portio arcus 15 graduum appellatur. " Il s'agit donc du calcul du sinus des arcs du premier quadrant, pris de 15° en 15°.

Prop. 3 (**) :

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = \text{sin. vers A} = R - \cos A$$

Prop. 4 (***) : Calcul de la longueur du côté du décagone et du pentagone réguliers inscrits dans une circonférence.

Prop. 5 (iv) :

$$\text{Corde (A} - \text{B)} = \sqrt{(\sin A - \sin B)^2 + (\cos B - \cos A)^2}$$

Regiomontan établit cette formule dans le but de pouvoir calculer le côté du pentédécagone régulier ; mais il a soin de dire qu'elle est générale et applicable dans tous les cas.

Prop. 6 (v) : Si A et B sont deux arcs du premier quadrant, $A > B$, on a

$$\frac{A}{B} > \frac{\sin A}{\sin B}$$

Cette proposition permet de calculer les valeurs des sinus en les comprenant entre deux inégalités de sens contraire. C'est l'application d'une idée que Ptolémée avait eue à propos du calcul des cordes (vi). Il est inutile cependant, dit Régiomontan, d'employer ce procédé à l'exclusion de tout autre. Il en est un plus rapide qui, en pratique, à un moment donné est tout aussi exact. Quand vous aurez calculé rigoureusement tous les arcs du premier quadrant de 15′ en 15′, vous pourrez supposer que les accroissements des sinus sont proportionnels à ceux des arcs et opérer au moyen d'une simple règle de trois.

Et la preuve ?

Elle est purement empirique. J'ai presque partout employé les deux méthodes, dit-il, et j'ai chaque fois constaté que les résultats étaient parfaitement concordants (vii).

Prop. 7 (viii) : Trouver le sinus d'un arc au moyen des tables.

(*) P. B_2 r°.

(**) P. B_2 v°.

(***) P. B_3 r°.

(iv) P. (B_4) r°.

(v) P. (B_4) r°. La démonstration de Régiomontan est remarquable d'élégance et de simplicité. Je regrette de ne pouvoir la résumer; mais le lecteur la trouvera, s'il le désire, dans les œuvres de Simon Stévin bien moins rares que la *Compositio tabularum Sinuum* (Édit. d'Albert Girard, II, p. 6).

(vi) *Claudii Ptolem. opera...* Éd. Heiberg. *Magna Syntaxis*, t. I, p. 45 seq.

(vii) P. (B_4) v°.

(viii) P. C r°.

Cette proposition n'a rien de théorique. Les tables dont il s'agit sont au nombre de deux. Elles donnent l'une et l'autre de minute en minute les sinus de tous les arcs du premier quadrant. La première est construite au rayon 60 000, et la seconde au rayon 100 000 (*).

Il y aurait ici une comparaison aussi instructive qu'intéressante à faire entre les procédés de Régiomontan et ceux dont Rheticus s'est servi dans l'*Opus palatinum;* mais je dois me borner.

(6) Cette réclamation de priorité surprend au premier abord. Je la crois cependant justifiée, à condition d'entendre l'énoncé de la proposition dans le sens rigoureux des termes et de ne pas regarder, comme un théorème équivalent, une proposition qui dirait, par exemple, que les triangles BAE, BAD sont semblables. Il faut juger en cela Coignet, avec les idées de son temps. Dois-je rappeler pour le justifier de combien de manières les Grecs ont tourmenté leurs proportions, et quelle variété de théorèmes ils y distinguaient ? Oserions-nous les énoncer encore aujourd'hui, même dans les ouvrages élémentaires, sans risquer d'encourir le reproche de tomber dans la prolixité et les redites?

Quant à la similitude des triangles BAE, BAD, elle avait été remarquée bien antérieurement à Coignet et Regiomontan s'en était servi dans son traité des triangles (**), pour calculer en fonction des côtés le rayon du cercle circonscrit à un triangle.

(7) Il est peut-être utile d'exprimer les énoncés de ces 8 problèmes, par des formules équivalentes :

Prob. 1 :

$$\cos A = \sqrt{R^2 - \sin^2 A}$$

Prob. 2 :

$$\text{corde}\,(A - B) = \sqrt{(\sin A - \sin B)^2 + (\cos B - \cos A)^2}$$

Prob. 3 :

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} \sqrt{\sin^2 A + \text{sin. vers.}^2 A}$$

Prob. 4 :

$$\sin 2A = \frac{2 \sin A \cos A}{R}$$

Prob. 5 :

$$\sin (A + B) = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{R}$$

Prob. 6 :

$$\sin (A - B) = \frac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{R}$$

(*) Chacune de ces tables occupe 18 pages.

(**) *De Triangulis.* Lib. II, prop. 23. Edition de Nuremberg, 1533, p. 56.

Prob. 7 :

$$\sin (A - B) = \tfrac{1}{2} \sqrt{(\sin A - \sin B)^2 + (\sqrt{1 - \sin^2 B} - \sqrt{1 - \sin^2 A})^2}$$

Prob. 8 : Étant donnés sin A et sin B, calculer sin (2A — B) et sin (2B — A).

Coignet lui-même remarque que les problèmes 7 et 8 sont sans grande importance et nous pouvons en dire autant aujourd'hui de la formule

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} \sqrt{\sin^2 A + \text{sin. vers.}^2 A}$$

La formule

$$\sin 2A = \frac{2 \sin A \cos A}{R}$$

était connue des Arabes. Le baron Carra de Vaux la signale dans l'Almageste d'Aboulwefa (*).

Delambre dit (**) que la formule

$$\text{corde}\,(A - B) = \sqrt{(\sin A - \sin B)^2 + (\cos B - \cos A)^2}$$

est de Regiomontan. On la trouve effectivement, nous venons de le voir, dans la *Compositio tabularum sinuum* (***). Quant aux formules

$$\sin (A \pm B) = \frac{\sin A \cos B \pm \cos A \sin B}{R}$$

(*) Art. cit. p. 416.

" La considération de la corde, dit Carra de Vaux, conduit vite à l'idée de la
" multiplication des arcs, puisque les définitions mêmes fournissent la relation:
" $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ corde 2α. Les formules employées par Abû 'lwéfa sont les suivantes:

$$\frac{\frac{1}{2} \sin \text{v.}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{R}; \qquad \frac{2R - \text{corde}\,(\pi - \alpha)}{\text{corde}\,\frac{\alpha}{2}} = \frac{\text{corde}\,\frac{\alpha}{2}}{R}$$

$$\frac{\text{corde}\,\alpha}{\text{corde}\,\frac{\alpha}{2}} = \frac{\text{corde}\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right)}{R}; \qquad \frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{1}{2} R}$$

" La dernière, lorsqu'on l'énonce en vue du calcul et qu'on y fait le rayon égal à
" l'unité est notre formule $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$. "

(**) *Histoire de l'Astronomie du Moyen Age*, chap. III, p. 282 et chap. VIII, p. 458.

(***) P. (B_4) r°. Voyez ci-dessus p. 149.

les erreurs qu'on rencontre à leur sujet sont nombreuses et de sens divers. Ces formules sont très importantes dans l'histoire de la construction des tables de sinus, et ont de l'intérêt. Nous leur consacrons la note 10.

(8) *Eucl. ed. Heiberg...*, t. I, p. 260.

(9) La perpendiculaire FH abaissée de F sur CD a été oubliée dans le dessin de la figure 11.

(10) NOTICE HISTORIQUE SUR LES FORMULES $\sin(a \pm b)$.

Il est impossible d'être quelque peu familier avec les anciens traités de trigonométrie, sans être frappé de la netteté et de la précision, que la formule

$$\sin(a \pm b) = \frac{\sin a \cos b \pm \sin b \cos a}{R}$$

prend sous la plume de Coignet et de la forme, presque moderne, dirais-je, sous laquelle elle y est énoncée.

Je n'apprendrai rien à personne en rappelant que Claude Ptolémée donne, dans l'*Almageste*, le théorème classique du rectangle des diagonales du quadrilatère inscrit dans un cercle, précisément en vue d'établir à propos des cordes de la somme ou de la différence de deux arcs, les propositions analogues à celles que nous démontrons aujourd'hui à propos des sinus de ces mêmes sommes et de ces mêmes différences (*). A la fin du xe siècle, Albategnius substitue aux cordes entières, les demi-cordes des arcs doubles et introduit ainsi l'usage des sinus dans le calcul (**). C'est un de ses plus beaux titres de gloire. Coignet déduit les formules $\sin(a \pm b)$ des théorèmes de Ptolémée d'une manière si simple, si naturelle, qu'en lisant sa démonstration on est porté à se dire que ces formules ne sont que ces théorèmes eux-mêmes, énoncés en d'autres termes.

Somme toute, c'est assez vrai et, s'il était permis de faire de l'histoire *a priori*, on se croirait même pleinement en droit d'ajouter, que depuis Albategnius les formules $\sin(a \pm b)$ ont évidemment été remarquées par tous les géomètres. Ce serait cependant là une grave erreur; car, quand on remonte aux sources, il faut bien reconnaître que cela n'est pas.

(*) *Claudii Ptolemaei opera Vol. I. — Syntaxis mathematica ed. J. L. Heiberg*, Pars. I, pp. 39-42. — Les démonstrations de l'astronome grec sont très bien exposées par Cantor dans ses *Vorlesungen über Geschichte der Mathem.*, 1e Band, 2e Aufl. Leipzig, 1894, p. 389, et par Delambre dans son *Histoire de l'Astronomie ancienne*, t, II, liv. III, ch. II, pp. 36-49.

(**) *De Motu stellarum*, chap. III; édit. de Nuremberg, 1537, ffo 5 ro, édit. de Bologne, 1645, pp. 7-14. L'astronome arabe a certainement le mérite d'avoir vulgarisé cette idée; mais les Indiens, et peut-être même quelques Grecs, l'ont eue avant lui (Voyez pour plus de détails von Braunmühl, *Vorlesungen über Gesch. der Trigon.*, Erster Teil, pp. 34, 49 et 260).

Je suis loin d'être le premier à le dire. Voici, par exemple, les réflexions d'un historien autorisé, Montucla, sur ce sujet (*).

" Je ne vois pas, dit-il, que personne avant les premières années de ce siècle, — „ c'est du XVIIIe siècle qu'il s'agit, — je ne vois pas que personne se soit avisé „ de rechercher les formules propres à exprimer les sinus ou cosinus, tangentes „ ou cotangentes des sommes ou différences d'arcs de cercle, de leurs puis- „ sances, etc. Il était cependant bien naturel ce semble et l'occasion a dû s'en „ présenter souvent, de chercher à connaître quel était le sinus ou le cosinus, „ la tangente ou la cotangente d'un arc, qui serait la somme ou la différence de „ deux autres, dont on connaissait les sinus et les cosinus, les tangentes ou „ cotangentes. Les premiers théorèmes sur ce sujet paraissent être l'ouvrage de „ Frédéric-Christian Mayer, l'un des premiers membres de l'Académie de „ Pétersbourg. On a de lui, dans les anciens Mémoires de cette Académie „ pour l'année 1727 (**), une trigonométrie analytique toute fondée sur ces „ théorèmes. Nous allons faire connaître les principaux et divers autres que „ les analystes y ont depuis ajoutés.

„ Si l'on a les arcs y et z, dont les sinus et cosinus soient respectivement „ exprimés ainsi, sin. y, sin. z; cos. y, cos. z, le rayon étant de plus supposé $= 1$, „ on a d'abord les quatre formules suivantes et fondamentales en sinus et „ cosinus des sommes et des différences de ces arcs :

$$\sin.\overline{y+z} = \sin. y \times \cos. z + \sin. z \times \cos. y$$

$$\cos.\overline{y+z} = \cos. y \times \cos. z - \sin. y \times \sin. z$$

$$\sin.\overline{y-z} = \sin\ y \times \cos. z - \sin. z \times \cos. y$$

$$\cos.\overline{y-z} = \cos. y \times \cos. z + \sin. y \times \sin. z$$

(*) *Histoire des mathématiques*, Paris, Agasse, an. X, t. III, part. 5, liv. I, no XXVI, pp. 276 et 277.

(**) Il s'agit des *Commentarii Academiae Petropolitanae*, t. II, *ad annum 1727*. Petropoli, typis Academiae, 1729; pp. 12-30 (Bibl. de l'Acad. roy. de Belgique). Le mémoire de Christian Mayer est intitulé *Trigonometrica F. C. Maieri* (Voyez à son sujet Cantor : *Vorlesungen über Gesch. der Math.*, 3e Band, Leipzig, Teubner 1898; pp. 539-540).

J'ai cherché à connaître l'impression produite dans le monde savant au siècle dernier par le mémoire de Mayer. Les grandes revues périodiques du temps s'en sont naturellement occupées; elles sont même parfois curieuses à lire, car elles semblent surtout effrayées par la nouveauté et l'étrangeté des notations de l'auteur. " Il faut être consommé, dit, par exemple, le rédacteur des Mémoires de Trévoux, pour suivre M. Mayer dans ses sçavantes abbreviations. „ (Cahier de nov. 1737, p. 1678). Quant aux Acta Eruditorum, ils nomment le mémoire de Mayer dans le cahier de juillet 1731, p. 298.

„ On trouve de même, que si y et z sont deux arcs, on aura

$$\text{tang.}\ \overline{y+z} = \frac{\text{tang.}\ y + \text{tang.}\ z}{1 - \text{tang.}\ y \times \text{tang.}\ z}$$

$$\text{tang.}\ \overline{y-z} = \frac{\text{tang.}\ y - \text{tang.}\ z}{1 + \text{tang.}\ y \times \text{tang.}\ z}$$

$$\text{sec.}\ \overline{y+z} = \frac{\text{sec.}\ y \times \text{sec.}\ z}{1 - \text{tang.}\ y \times \text{tang.}\ z}$$

$$\text{sec.}\ \overline{y-z} = \frac{\text{sec.}\ y \times \text{sec.}\ z}{1 + \text{tang.}\ y \times \text{tang.}\ z}$$

„ Il est facile à quiconque a le goût de l'analyse, d'apercevoir l'élégance et „ l'analogie de ces expressions. Elles eussent été d'une grande utilité aux „ premiers calculateurs de nos tables trigonométriques; mais quoique la „ découverte de ces théorèmes n'excédât pas la force de la trigonométrie de „ leur temps, je ne vois pas qu'ils leur fussent connus. „

On doit en convenir, pour qu'un historien de l'érudition de Montucla ait pu tenir ce langage, il faut que dans l'antiquité et au moyen âge, les géomètres qui ont employé les formules $\sin(a \pm b)$ aient été peu nombreux.

Des recherches subséquentes ont cependant conduit de nos jours à des conclusions assez différentes. En voici quelques-unes offrant, peut-être, de l'intérêt.

Dans un article déjà plusieurs fois nommé ici même, *L'Almageste d'Abû'lwéfa Albûzdjani* par M. le baron Carra de Vaux et publié en 1892 dans le Journal Asiatique (*), ce savant a démontré que les formules $\sin(a \pm b)$ se trouvent déjà dans l'ouvrage de l'astronome arabe. Aboulwéfa (**) y obtient d'abord par des considérations à moitié géométriques, à moitié algébriques, l'expression assez lourde (***)

$$\sin(a \pm b) = \sqrt{\sin^2 a - \frac{\sin^2 a \sin^2 b}{R^2}} \pm \sqrt{\sin^2 b - \frac{\sin^2 a \sin^2 b}{R^2}}$$

Mais il est plus heureux bientôt après, et arrive alors explicitement à la formule moderne (IV)

$$\sin(a \pm b) = \frac{\sin a \cos b \pm \cos a \sin b}{R}$$

(*) 8e série, t. XIX. Paris, 1892; pp. 408-471.

(**) Le nom d'Aboulwéfa me semble avoir acquis droit de bourgeoisie dans la langue française et je crois pouvoir écrire avec Delambre, Aboulwéfa au lieu d'Abû 'lwéfa.

(***) *Loc. cit.*, p. 418.

(IV) *Loc. cit.*, p. 419.

On n'est pas d'accord sur l'année de la naissance d'Aboulwéfa. Le baron Carra de Vaux la met en 959 après J.-C.; Cantor l'avance de 19 ans et la place en 940; mais les deux historiens datent l'un et l'autre de 998 (*) la mort de cet astronome. Il est donc, en tous cas, à peu près le contemporain d'Albategnius, puisque celui-ci vécut de l'an 850 à l'an 929 de notre ère environ.

L'influence de la découverte d'Aboulwéfa, sur la science des Occidentaux, a été nulle. La chose est hors de doute et d'ailleurs généralement admise. En voici cependant une nouvelle preuve, peu connue, mais curieuse parce qu'elle se rapporte directement à Régiomontan.

Dans le discours d'ouverture si original, par lequel ce grand constructeur de tables de sinus commence à Padoue son cours de leçons sur Alfragan (**); dans le résumé si précieux pour l'histoire des connaissances scientifiques de son temps, qu'il nous y laisse (***); il parle jusqu'à trois reprises différentes des Arabes. Il nomme Albategnius, Geber, Alfragan, Alhazen et Avicennes; il ne dit pas un mot d'Aboulwéfa.

Mais écoutons-le plutôt lui-même. Dans un style solennel et pompeux, il vient de résumer devant ses auditeurs, les progrès faits par l'astronomie sous les Grecs et les Latins, puis il continue en ces termes. Je traduis (IV).

" La haute valeur des Arabes en ce genre de sciences, nous est prouvée „ par des témoins très dignes : Albategnius mis en latin par un certain „ Platon de Tivoli; ensuite Geber de Séville, traduit par un certain Gérard de „ Crémone (V). Albert le Grand, dans son *Miroir astronomique*, ne craint pas de „ nommer ce dernier le correcteur de Ptolémée, parce que dans sa préface il „ promet de rectifier jusqu'à treize erreurs de Ptolémée. Ce n'est pas ici le lieu „ de dire, combien les neuf traités de son ouvrage sont beaux et utiles. Enfin, „ si nous nous mettons au point de vue de l'astronomie pure, nous rendrons „ les plus grandes actions de grâces à Alfragan, pour peu que nous nous sen- „ tions capables de comprendre sa doctrine. „

Deux pages plus loin, à propos de la Perspective, Regiomontan parle d'Alhazen (VI); puis, deux pages plus loin encore il nomme Avicennes, qu'il

(*) Carra de Vaux, *loc. cit.*, note de la p. 411. Cantor, *Vorles. über Geschichte der Mathematik*, 1e Band, 2e Aufl. Leipzig, 1894, p. 662.

(**) *Oratio introductoria in omnes Scientias Mathematicas Ioannis de Regiomonte, Patauii habita, cum Alfraganum publice praelegeret.* Nuremberg, 1537. J'ai transcrit, ci-dessus (p. 147) le titre complet de cet ouvrage : *Continentur in hoc libro...* etc.

(***) Voyez ce qu'en dit Cantor dans ses *Vorlesungen über Gesch. der Mathem.*, 2e Band, 2e Aufl., Leipzig, 1900, pp. 260-262.

(IV) P. 11 non chiffrée.

(V) *Loc. cit.* " Plato quidam Tiburtinus,... „ dit Regiomontan, " Gerardo quodam Cremonensi „. Mais ce mot " quidam „ n'a pas dans sa bouche le sens quelque peu méprisant, qu'on pourrait, à tort, être porté à y voir.

(VI) P. 13 non chiffrée.

appelle : " egregium de lineis et numeris scriptorem „ (*). Mais encore une fois, c'est tout ce que ce discours si remarquable contient sur la science des Arabes et Aboulwéfa y est passé sous silence.

On ne peut donc, que se rallier à la conclusion de l'étude du baron Carra de Vaux, quand il dit (**) :

" Très originale si on la compare aux écrits antiques, „ la trigonométrie d'Aboulwéfa " l'est même en regard des travaux occidentaux plus modernes, „ car les progrès qu'elle renferme se sont perdus, et les formules trouvées par „ les Arabes au IXe siècle ont dû être réinventées cinq cents ans plus tard par „ des Latins, dont elles ont fait la gloire. „

Mais il est temps d'aborder ces Latins eux-mêmes.

Parcourons leurs noms à peu près par ordre de date.

Dans son traité *Super propositiones Ptolemaei de sinibus et chordis*, Purbach (***) n'a pas la proposition sin $(a \pm b)$.

Je ne la trouve pas non plus dans la *Compositio tabularum sinuum* (IV) de

(*) C'est à-dire : " Un écrivain ayant écrit d'une manière excellente sur les lignes et les nombres. „ P. 15, n. ch.

(**) *Loc. cit.*, p. 439.

(***) Voir plus haut p. 148.

Le traité de Purbach est divisé en deux parties. Dans la première (p. A_2 r° — A_3 r°) il s'occupe du calcul des sinus, *per Kardagas*. J'ai déjà dit ce qu'il fallait entendre par ce mot (p. 149). Purbach nous avertit lui-même qu'il le fait d'après Arzahel. Von Braunmühl analyse fort exactement cette méthode de l'astronome arabe dans ses *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* (Erste Teil, p. 78).

La deuxième partie (pp. A_3 r°-B r°) renferme les six propositions classiques de Ptolémée sur les cordes du cercle. Elles ne sont qu'une réédition de celles que l'on pouvait lire depuis 1496 dans l'*Epytoma Joânis De môte regio In almagestû ptolomei*; à part toutefois l'application de ces propositions à la construction de la table des cordes, qui est un peu plus développée ici que dans l'*Epitoma*. On le sait, la première moitié de l'*Epitoma* est de Purbach et Regiomontan n'a fait qu'achever l'œuvre de son maître.

La première édition de l'*Epitoma* n'a au titre ni date ni adresse d'imprimeur, mais on lit à la dernière page : *Explicit Magne Compositionis Astronomicon Epitoma Johannis de Regio monte. Impensis non minimis : curaq; et emendatione non mediocri virorum praestantiû Casparis Grossch : et Stephani Roemer. Opera quoq; et arte impressionis mirifica viri solertis Johannis hâman de Landoia : dictus herzog : felicibus astris expletum. Anno a prima rerum etherearû circuitione. 8480. Sole in parte sextadecima virginis gradiente. In hemispherio Veneto : Anno salutis 1496, currente : Pridie Calen. Septembris Venetiis : Maximiliano Romanorum rege primo Faustissime imperante.* In fol. (Bibl. roy. de Belgique. Incunable, 905).

(IV) Voir plus haut, p. 148.

Regiomontan, et on sait qu'il ne s'occupe pas de la construction des tables dans l'*Opus tabularum directionum profectionumque* (*).

Voilà pour le XVe siècle.

Serons-nous plus heureux au XVIe ?

Pierre Apien dans l'*Instrumentum primi mobilis* (**), Oronce Fine dans les diverses éditions de la *Mundi sphaera* (***), Rheinhold dans le *Liber tabularum*

(*) Ouvrage célèbre dans l'histoire de la trigonométrie. Il renferme la première table de sinus et la première table de tangentes qui aient été imprimées; les sinus y sont calculés au rayon 60 000 et pour toutes les minutes du premier quadrant, les tangentes au rayon 100 000, mais de degré en degré seulement. Il a eu de nombreuses éditions. La première dont l'existence soit certaine est celle qui est sortie en 1490, à Augsbourg, des presses du grand imprimeur d'ouvrages scientifiques de l'époque, Ratdolt de Venise. L'exemplaire de la Bibliothèque royale de Belgique (Incunable 1724) est malheureusement incomplet. Il contient les tables sans aucune lacune, mais toute l'Introduction fait défaut. J'ai complété les renseignements qu'il ne pouvait me fournir à l'aide de l'édition de Tubingue 1550 (Bibl. roy. de Belg., v. 5164). Je transcris, dans le *Catalogue des incunables de la Bibliothèque Mazarine*, par Paul Marais et A. Dufresne de Saint-Léon (Paris, Welter, 1893, p. 294), le titre de l'édition de 1490. *Tabule directionû profectionvq; Famosissimi viri Magistri Joannis Germani de Regiomonte in nativitatibus mvltvm vtiles*; sans date ni adresse d'imprimeur.

(**) *Instrumentum primi mobilis, a Petro Apiano nunc primum et inventum et in lucem editum... Accedunt iis Gebri... libri IX de Astronomia.. Norimbergae, apud Io. Petreium, anno MDXXXIII.* In-f° (Bibl. du Coll. de la Comp. de Jésus à Louvain). C'est dans cet ouvrage qu'a été imprimée pour la première fois une table de sinus indépendante de la division sexagésimale du rayon. Elle est calculée au rayon 100 000 et pour toutes les minutes du premier quadrant. Pierre Apien ne nous dit pas par quels procédés il l'a construite. Il existe une réimpression de son ouvrage (Nuremberg, 1541), qui ne contient pas le traité de Geber. Nous l'avons déjà nommée ci-dessus (p. 148).

(***) Imprimé d'abord dans *Orontii Finaei Delphinatis, Liberalium disciplinarum professoris regii, Protomathesis... Parisiis 1532.* In-f°. Bibl. roy. de Belg. V. 5279. Reproduit ensuite avec des changements de rédaction assez considérables dans *Orontii Finei Delphinatis, Regii mathematicarum professoris De Mundi Sphaera siue Cosmographia, primave Astronomiae parte, Lib. V : Inaudita methodo ab authore renovati propriisque tum commentariis ac figuris, tum demonstrationibus et tabulis recens illustrati. Eiusdem Orontii Rectarum in circuli quadrante subtensarum (quos sinus vocant) demonstratio, supputatioque facillima, nunc primum edita : una cum eorundem sinuum tabula, fideli admodum calculo supputata. Eiusdem Orontii organum universale, ex supradicta sinuum ratione contextum, quo tum geometrici tum omnes astronomici canones, ex quatuor sinuum proportione pendentes, mira facilitate practicantur. Parisiis ex officina Simonis Colinaei 1542. Cum amplissimo Privilegio.* In-f°. Bibl. roy. de Belg. V. 1542.

directionum (*), Viète (**) lui-même, justifient pleinement ce que dit Montucla. Pas un d'entre eux non plus n'a la formule sin $(a \pm b)$.

Nous pourrions allonger presque à volonté cette liste en y ajoutant, par exemple, Thomas Finkius (***), Philippe van Lansberge (IV), Clavius (V), Ursus Dithmarsus (VI) et bien d'autres, car nous n'aurions ici que l'embarras du choix.

(*) *Primus liber Tabvlarvm directionvm discentibvs prima elementa Astronomiae necessarius et utilissimus. His insertvs est canon secundus ad singula scrupula quadrantis propagatus. Item nova tabvla climatum, et Parallelorum, item umbrarum. Appendix canonvm secvndi libri Directionum, qui in Regiomontani opere desiderantur. Authore Erasmo Rheinholdo Salueldensi. Cum gratia et privilegio Caesareae et Regiae Maiestatis. Tvbingae apud haeredes Vlrici Morhardi. Anno M.D.LIII.* In-4° (Bibl. roy. de Belg., v. 5125²). C'est le plus ancien ouvrage contenant une table de tangentes pour toutes les minutes du premier quart de cercle. Elle est calculée au rayon 10 000 000. Les tables de Rheinhold sont précédées d'une introduction contenant la démonstration de 60 préceptes, parmi lesquels les préceptes 3-9 forment un petit traité de trigonométrie (pp. γ r°-ε v°).

(**) Outre le *Canon Mathematicus*, il faut lire encore le chapitre XIX° du *Variorum de rebus mathematicis responsorum* pour connaître les idées de Viète sur la construction des tables trigonométriques.

(***) *Geometria rotundi*, pp. 123-136.

(IV) *Triangulorum geometriae libri IV* (cités ci-dessus p. 116), liv. I et II.

(V) *Christophori Clavii Bambergensis opera...*, t. II..., *Sinus vel semisses rectarum in circulo subtensarum lineae secantes et tangentes...*, pp. 50-148.

Ce volume des *Opera* ne fut édité qu'en 1611, mais d'après la *Bibliothèque de la Compagnie de Jésus* des PP. De Backer et Sommervogel (3e éd., t. II, Bruxelles, 1891, v° Clavius) ce travail de Clavius parut pour la première fois à Rome, en 1586, dans ses *Theodosii Tripolitae Sphaericorum libri tres*. Dès l'année suivante, en 1587, Clavius donna encore : *Tabulae sinuum, tangentium et secantium ad partes radii 10,000,000 et ad scrupula prima quadrantis, et ad earum praxim brevis introductio ex pleniore tractatu Christophori Clavii Bambergensis e Societate Jesu. Moguntiae ex Typographia Joannis Albini. Anno M.DC.VII.* In-4° (Bibl. roy. de Belg., II, 43437). Comme ce titre le fait prévoir, l'auteur n'y réédite pas son grand traité de la construction des tables trigonométriques.

(VI) *Fundamentum Astronomicum...* Cap. II de Extructione Canonis sinuum, p. 5 v°-13 v° (Voir ci-dessus pp. 106-110).

L'auteur revint sur la construction des tables de sinus dans son livre de *Astronomicis Hypothesibus* (Prague, 1597, in-4°), et donna, sous le nom de *règle de l'aggrégat*, p. I r°-I v° et de *règle de l'excès*, p. I v°, deux expressions des plus compliquées pour sin $(a + b)$ et sin $(a - b)$. On peut les lire dans Delambre (*Hist. de l'Astr. mod.*, t. I, liv. III, pp. 302-303).

Ne nous hâtons cependant pas trop de conclure, car il est en outre, au XVIe siècle, deux savants de premier ordre sur lesquels l'attention se porte nécessairement et dont il est difficile de séparer les noms dans l'étude qui nous occupe. J'ai dit Copernic et Rheticus.

Ouvrons d'abord le *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (*).

Les trois derniers chapitres du premier livre ne sont autre chose qu'un traité de trigonométrie (**) et Copernic y consacre le chapitre douzième tout entier à la construction des tables de sinus. Dans ce chapitre — il prend soin de nous le dire lui-même (***) — il s'en tient exclusivement aux théorèmes de Ptolémée et

---

(*) *Nicolai Copernici Torinensis, De Revolutionibus orbium coelestium Libri VI. Norimbergae apud Ioh. Petreium. Anno M.D.XLIII.* In-f°. C'est l'édition originale très rare (Bibliothèque royale de Belgique; fonds Van Hulthem, nn° 8284 et 8285).

(**) On sait que deux de ces chapitres, le 13e et le 14e, avaient été publiés dès l'année précédente par Rheticus, dans *De lateribvs et angvlis triangulorum, tum planorum rectilineorum, tum sphaericorum, libellus eruditissimus et utilissimus cum ad plerasque Ptolemaei demonstrationes intelligendas, tum uero ad alia multa, scriptus a Clarissimo et doctissimo uiro D. Nicolao Copernico Torinensi. Additus est Canon semissium subtensarum linearum in Circulo. Excussum Vittembergae, per Ioannem Lufft. Anno M.D.XLII.* In-4° (Bibl. du Coll. de la Comp. de Jésus à Louvain).

Antérieurement à l'*Opus Palatinum*, Rheticus avait publié un petit *Canon doctrinae Triangulorum*. A ma demande, le R. P. Van den Gheyn, S. J., Conservateur à la Section des manuscrits de la Bibliothèque royale de Belgique, a bien voulu, dans un voyage récent, examiner l'exemplaire qu'en possède la Hof- und Staatsbibliothek de Munich. Math. P. 168. Voici la description qu'il m'en donne :

" *Canon doctrinae Triangulorum. Nunc primum a Georgio Ioachimo Rhaetico*
„ *in lucem editus. Lipsiae, Wolfgang Gunter, 1551.* In 4°. Signatures : Aij. Aiij,
„ B, Bij, Biij, C, Cij, Ciij.

„ Il contient une pièce de vers : De Studio et opera singulari explicandi
„ doctrinam triangulorum Georg. Ioachimi Rhetici. Cette pièce est signée
„ Mathias S. R. φιλομαθὴς. F.

„ Suit le *Canon doctrinae triangulorum in quo triquetri cum angulo recto in*
„ *planitie partium 10 000 000 ponitur* (14 pages de tables).

„ Suit le *Dialogus de Canone doctrinae triangulorum Georgii Ioachimi*
„ *Rhetici.* „

A en juger par l'analyse que Hunrath fait de cet opuscule dans le FESTSCHRIFT ZUM SIEBZIGSTEN GEBURTSTAGE MORITZ CANTOR (pp. 213-217), ce n'est pas à lui mais à l'*Opus Palatinum* qu'il faut recourir pour connaître les idées de Rheticus.

(***) *Op. c.*, f° 12, v° " Haec autem sex theorematis explicabimus et uno problemate Ptolemaeum fere secuti. „

aux démonstrations du géomètre grec. De fait, on y chercherait en vain une idée, qui ne se trouve déjà dans l'*Almageste*. Exceptons-en, toutefois, cette remarque jetée, isolée et comme perdue, à la fin du chapitre (*) :

" Je crois suffisant de donner dans la table la moitié des cordes de l'arc „ double. Par cette abréviation nous comprendrons en un quadrant ce qu'il „ aurait fallu étendre à une demi-circonférence. La chose est d'autant plus „ avantageuse, que les moitiés des lignes viennent plus souvent dans les „ démonstrations et les calculs, que les lignes entières. „

Faut-il conclure de cette phrase, que Copernic a connu la formule $\sin(a \pm b)$ et qu'il en a fait usage? Peut-être. Mais pour moi j'en doute et voici pourquoi.

Si quelqu'un devait savoir exactement à quoi s'en tenir au sujet de l'idée du chanoine de Frauenburg, c'était bien son élève, son collaborateur, son éditeur, son ami, Rheticus en un mot (**). Or, quand celui-ci reprend la question dans l'*Opus Palatinum de Triangulis*, voici l'invraisemblable formule par laquelle il débute (***) :

$$\operatorname{Sin}(a+b) = \frac{\mathrm{R}\sin b}{\cos a} + \frac{\sin a}{\mathrm{R}}\left[\cos b - \frac{\sin a \sin b}{\cos a}\right]$$

Décidément ce n'était pas là un coup de maître. C'était à peine une formule pratique. Il fallait imaginer mieux, quand on se proposait comme lui de calculer une table de sinus avec quinze décimales. Rheticus se rappela probablement alors le traité des *Révolutions*, qu'il connaissait si bien, et la remarque finale du chapitre de la construction des tables (IV). Il retravailla le problème et finit par

(*) *Op. cit.*, f° 15, r°.

(**) Voyez les " prolegomena „ des éditeurs (p. XIII) dans les *Nicolai Copernici Thorvnensis de Revolvtionibvs orbivm coelestivm libri VI ex avctoris avtographo recvdi cvravit Societas Copernicana Thorvnensis*... Thorvni, Svmptibvs Societatis Copernicanae, MDCCCLXXIII. Gr. in-4°.

(***) Dans le traité : *De Fabrica Canonis Doctrinae Triangulorum, Lib. II*, prop. 5, pp. 20-21. C'est la première démonstration intitulée par l'auteur, on ne voit pas trop pourquoi, " compositio „.

(IV) Je fais allusion à quelques propositions du livre I de la *Fabrica Canonis Doctrinae Triangulorum*, dont voici le résumé.

Lem. 4. Démonstration du théorème de Ptolémée, sur la propriété des diagonales du quadrilatère inscrit dans une circonférence (p. 8).

Coroll. Cinq droites de ce quadrilatère inscrit étant connues, on possède les éléments nécessaires pour calculer la sixième (pp. 8, 9).

Lemm. 5. Étant donné un quadrilatère inscrit, il est possible de former un second quadrilatère, ayant pour côtés les demi-côtés du précédent, pour diagonales les demi-diagonales et ce nouveau quadrilatère sera inscriptible (p. 9).

Coroll. Si l'on découvre une propriété du quadrilatère inscrit, celle-ci restera vraie, qu'il s'agisse des cordes entières ou des demi-cordes (p. 9).

Toute cette suite de lemmes et de corollaires ne sont en définitive, on le voit, que la démonstration de la remarque de Copernic.

énoncer la loi suivante. Je prie le lecteur de bien vouloir se souvenir, que l'auteur n'emploie jamais les mots sinus et cosinus. Dans sa terminologie, les sinus sont des *perpendiculaires* et les cosinus des *bases*.

" Étant données, dit Rheticus (*), les perpendiculaires et les bases de deux „ arcs inégaux ; qu'on multiplie la perpendiculaire de l'un, par la base de „ l'autre, qu'on ajoute les deux produits, on aura la perpendiculaire de l'arc „ composé par la somme des deux arcs proposés. Qu'on retranche le plus petit „ produit du plus grand, on aura la perpendiculaire de l'excès du plus grand „ arc sur le plus petit. Pour avoir les bases, multipliez la perpendiculaire d'un „ arc par la perpendiculaire de l'autre et la base par la base ; ajoutez les pro- „ duits, vous aurez la base de l'excès du plus grand arc sur le plus petit. „ Retranchez le plus petit produit du plus grand, vous aurez la base de l'arc „ formé par la somme des proposés. Mais dans tous les cas, après l'addition et „ la soustraction, vous diviserez le résultat obtenu par le nombre des parties du „ diamètre. „

Le diamètre dont il est ici question est celui d'un cercle auxiliaire, décrit sur le rayon du cercle trigonométrique. Cela résulte sans ambiguïté du contexte.

Nous nous trouvons bien cette fois clairement et d'une manière tout à fait explicite en présence des formules :

$$\sin(a \pm b) = \frac{\sin a \cos b \pm \cos a \sin b}{\mathrm{R}}$$

$$\cos(a \pm b) = \frac{\cos a \cos b \mp \sin a \sin b}{\mathrm{R}}$$

Mais, quelle peine, quels détours, quelles considérations entortillées leur démonstration coûte à Rheticus !

Grâce à l'algèbre, grâce à l'excellence de nos notations, nous hésiterions aujourd'hui à leur consacrer quelques lignes pour les déduire du théorème de Ptolémée. Il ne faut pas à Rheticus moins de quatre grandes pages in-folio bien remplies pour en venir à bout (**).

Aussi, en étudiant ce travail si long, si laborieux, et en songeant a la phrase de Copernic, je ne puis m'empêcher de me rappeler ce conseil de Delambre, dans son analyse des œuvres de Viète (***) :

" Il faut être très circonspect dans les interprétations que nous donnons „ parfois à des passages obscurs, pour attribuer à quelque ancien une décou- „ verte à laquelle il n'a jamais songé. „

(*) *De Fabrica Can. Doctr. Triang. lib. II.*, " Quatuor antecedentium propositionum canon secundum Ptolemaeum lemma. „ (p. 25.)

Cette règle se trouve énoncée entre les propositions 8 et 9.

(**) Op. cit. — *De Fabrica Canonis Doct. Triang.*, lib. II, prop. 5-9, pp. 21-25.

(***) *Hist. de l'Astron. du Moyen Age.* Chap. VIII, p. 478.

Je résume :

Aboulwéfa chez les Arabes, Rheticus (*) chez les Latins ont certainement énoncé et démontré les formules sin $(a \pm b)$.

Comment se fait-il alors, me dira-t-on, que des théorèmes si utiles aient eu tant de peine à se vulgariser et à entrer dans l'usage courant ?

Pour une raison bien simple.

Aboulwéfa n'était pas connu. Quant à l'auteur de l'*Opus Palatinum*, c'est un écrivain prolixe, obscur et souvent difficile. Disons le mot, il faut un certain courage et une forte dose de patience pour le lire et chercher à le comprendre. Rien d'étonnant que beaucoup de géomètres aient reculé devant cette tâche (**).

Cette réflexion me ramène à Coignet.

S'il y a du mérite à découvrir la vérité, il y en a aussi à la mettre en pleine lumière. Il faut reconnaître, que ce dernier mérite, Coignet l'a eu au plus haut degré. Il a profondément étudié Rheticus. La comparaison des ouvrages des deux savants ne laisse aucun doute à cet égard. J'admets, que le mathématicien anversois a trouvé chez son devancier les formules sin $(a \pm b)$. J'en suis même convaincu. Mais qui empêchait Stevin (***), Henrion (IV) Snellius (V) ou

(*) Ces formules se trouvent naturellement aussi dans Pitiscus, le correcteur et le continuateur de Rheticus. Voyez : *Trigonometriae libri V*, édit. d'Augsbourg, 1600, pp. 45-48; édit. d'Augsbourg, 1608, pp. 56-58; édit. de Francfort, 1612, pp. 65-70.

(**) Si l'on veut bien relire le passage de Montucla, transcrit au commencement de cette note, on constatera que lui aussi, comme tant d'autres, a reculé devant l'ennui d'étudier Rheticus. S'il s'était donné la peine de parcourir avec un peu d'attention l'*Opus Palatinum*, il aurait vu, qu'il y est fait continuellement usage des formules sin $(a \pm b)$.

(***) L'édition d'Albert Girard que l'on cite habituellement, diffère ici d'une manière notable des trois autres; seule elle ne donne pas les tables des lignes trigonométriques. Comme j'ai à ma disposition les quatre éditions des œuvres de Stevin, j'ai cru utile de les examiner toutes :

Wisconstige gedachtenissen... Vol. I, Eerste bovck (sic) des driehovckhandels (sic) van het maecksel des tafels der hovckmaten (sic), pp. 1-140.

Hypomnemata mathematica... Vol. I. Pars. 1ª cosmographiae. De Triangulorum doctrina. Lib. I, pp. 1-140.

Mémoires mathématiques. Descrit premierement en Bas Alleman par Simon Stevin de Bruges, translaté en François par Jean Tuning... Vol. I. Première partie du Traicté des triangles; de la composition des tables des sinus, pp. 1-140.

Les Œuvres mathématiques de Simon Stevin de Bruges,... par Albert Girard... 2e vol. Premier livre de la construction des sinus, pp. 1-10.

(IV) *Mémoires mathématiques...* Paris M.DC.XXIII. In-8°. Bibl. de l'Univ. de Gand. Math. 789B, t. I, pp. 45-72.

(V) *Doctrinae Triangulorum canonicae libri quatuor.* Lugd. Bat. Maire 1627. In-8°. Lib. I, pp. 1-61.

même van Lansberge (*) de les y remarquer comme lui ? Je ne nomme cependant que des géomètres de première valeur, qui tous ont publié des tables des lignes trigonométriques et avaient un intérêt évident à les composer, ou tout au moins à les vérifier (**) par les procédés les plus simples possible (***).

(11) Cette note de Coignet est intéressante, mais demande quelques explications. Résumons-la d'abord en langage moderne.

Soit la progression géométrique

$$\frac{1}{2} : \sin A : 2 \sin^2 A : 4 \sin^3 A : 8 \sin^4 A : 16 \sin^5 A : \ldots$$

Si nous appliquons à ses différents termes, les règles indiquées par l'auteur, nous aurons :

" Pour doubler "	$\cos 2A = 1 - 2 \sin^2 A.$
" Pour tripler "	$\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A.$
" Pour quadrupler "	$\cos 4A = 1 - 8 \sin^2 A + 8 \sin^4 A.$
" Pour quintupler "	$\sin 5A = 5 \sin A - 20 \sin^3 A + 16 \sin^5 A$

Les termes de cette série ne sont pas assez nombreux, pour nous en faire apercevoir immédiatement la loi de formation. Mais Coignet a pris soin de nous avertir que sa " très singulière pratique est trouvée par la reigle d'algèbre " Il est assez naturel de se dire, que par ces mots il entend probablement nommer Viète.

Quoi qu'il en soit, nous nous trouvons en présence d'un problème de l'opuscule : *Ad Problema quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus, Francisci Vietae responsum* (IV).

(*) Je ne cite pas la première édition des *Triangulorum geometriae libri IV*, puisqu'elle est de 1591 et qu'elle précède par conséquent l'*Opus Palatinum*; mais la deuxième " *ab auctore recognita, multisque in locis aucta* ", publiée en 1631 seulement, mais néanmoins du vivant de l'auteur (pp. 1-107). Voyez aussi dans les *Opera omnia;* triang. geom. lib. IV (pp. 1-54).

(**) Leurs tables n'ont évidemment pas toutes été calculées en entier à nouveau. La chose est incontestable pour Stevin, par exemple. Ce ne sont souvent que des éditions revues et corrigées de tables plus anciennes.

(***) Je me serais écarté du but spécial de cette note, beaucoup trop longue déjà, en faisant l'histoire de la formule sin $(a \pm b)$ chez les Indiens. Cette question a été d'ailleurs tout récemment fort bien résumée dans les *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* de von Braunmühl (Erster Teil, p. 37).

(IV) Parisiis, Apud lamettum Mettayer, Typographum Regium, 1595. In-4° pp. 10 v° et 11 r°. Bibl. roy. de Belg. V. 5007.

Dans les *Francisci Vietae opera*, édités par Schooten, Leyden, 1646, pp. 318 et 319.

Avouons-le sans détours, Viète a fait de son énoncé un obscur et presque intraduisible logogriphe. Heureusement, il a pris soin de le répéter en partie sous une forme algébrique, ce qui va nous permettre de le deviner. Je prie le lecteur de bien vouloir se rappeler que 1. N, 1. Q, 1. C désignent respectivement, la première, la deuxième et la troisième puissance de l'inconnue.

Cela posé, voici d'abord la transcription littérale des équations de Viète (*).

		2	— 1Q		basi	duplus
		3N	— 1C		perpend.	triplus
	2	— 4Q	+ 1QQ		basi	quadruplus
	5N	— 5C	+ 1QC	aequa	perpend.	quintuplus
2	— 9Q	+ 6QQ	— 1CC	bitur	basi	sextuplus
7N	— 14C	+ 7QC	— 1QQC		perpend.	septuplus
2 — 16Q	+ 20QQ	— 8CC	+ 1QCC		basi	octuplus
9N — 30C	+ 27QC	— 9QCC	+ 1 CCC		perpend.	nonuplus

ejus triangulii cujus angulus acutus ad acutum primi est

„ Et eo in infinitum continuando ordine, adscita si placet numerorum „ continue triangulorum suum a binario ducentium incrementum Tabella. „

Pour pouvoir nous faire comprendre, écartons-nous légèrement du texte de Viète. Il veut dire : Considérons les équations

$$
\begin{aligned}
2 \quad - x^2 &= f(2A)\\
3x \quad - x^3 &= f(3A)\\
2 \quad - 4x^2 + x^4 &= f(4A)\\
5x \quad - 5x^3 + x^5 &= f(5A)\\
2 \quad - 9x^2 + 6x^4 - x^6 &= f(6A)\\
7x \quad - 14x^3 + 7x^5 - x^7 &= f(7A)\\
2 \quad - 16x^3 + 20x^4 - 8x^6 + x^8 &= f(8A)\\
9x \quad - 30x^3 + 27x^5 - 9x^7 + x^9 &= f(9A)
\end{aligned}
$$

équations que l'on peut prolonger indéfiniment, en se servant, au besoin, pour la formation des coefficients du tableau, des nombres figurés commençant par 2. Ces équations admettent la solution :

$$x = 2 \sin A, \quad f(2n\,A) = 2 \cos 2n\,A, \quad f[(2n+1)\,A] = 2 \sin (2n+1)\,A.$$

Il est clair qu'en introduisant cette hypothèse dans les quatre premières équations, on obtient les identités de Coignet.

Viète ajoute, et la remarque valait la peine d'en être faite, qu'en prolongeant

*) Éd. de Paris, 1595, p. 11 r°; éd. de Leyden, 1646, p. 319.

la loi jusqu'à la 45e puissance de l'inconnue, on trouve l'équation du 45e degré d'Adrien Romain (*).

(12) Nous employons ici des lettres grecques qui ne se trouvent pas dans le manuscrit. Coignet y fait usage des symboles ou caractères spéciaux dus à Stiefel (**), et dont Clavius (***), Brasser (IV) et un grand nombre d'autres algébristes se servaient pour représenter les diverses puissances de l'inconnue; caractères que ne possède pas notre imprimeur. Le lecteur qui désirerait les connaître les trouverait entre autres dans le tome II des *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* de Cantor (V).

(13) Voyez sur la vie et les travaux de ce savant la *Notice sur Ludolphe van Colen*, par M. G. A. Vosterman van Oijen, publiée en français dans le Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Mathematiche e Fisiche de Boncompagni (VI).

Le livre du cercle est le chef-d'œuvre de van Coelen. Il a eu trois éditions fort soigneusement décrites par Bierens de Haan dans son étude sur *Quelques quadrateurs du Cercle dans les Pays-Bas* (VII).

La première, *Van de Circkel, Daer in gheleert werdt te vinden de naeste proportie des Circkels-Diameter teghen synen omloop... Delft, Jan Andriesz, 1596*. In-f°. Je n'ai pas eu jusqu'ici l'occasion de la voir.

La seconde, publiée par Adriana Symons, veuve de van Coelen,... *van nieuws*

(*) Éd. de Paris, 1595, p. 11 r°; édit. de Leyde, 1646, p. 319.

L'équation d'Adrien Romain a été donnée, on le sait, dans les liminaires des *Ideae mathematicae pars prima, sive methodus polygonorum*, p. 14 non ch. Son histoire est trop connue pour qu'il y ait lieu d'y revenir ici (V. Cantor, *Vorl. üb. Gesch. der Math.*, 2e Band, 2e Aufl., p. 606).

(**) *Arithmetica integra, Authore Michaele Stiefelio Cum Praefatione Norimbergae apud Johan. Petreium. Anno Christi M.D.XLIIII. Cum gratia et privilegio Caesareo atq. Regio ad Sexennium.* In-4° (Bibl. de l'Univ. de Louv., Ar. V, rel. 24).

(***) *Algebra Christophori Clavii Bambergensis...* Romae M.DC.VIII. In-4°. Bibl. de l'Univ. de Gand, Math. 683, ou bien : *Opera*, t. II.

Il en existe aussi une traduction française : *L'Algèbre de Christophe Clavius... traduite du latin par Gilles Guillion...* Liége... Streel... M.DC.XII. In-4°. Bibl. de l'Univ. de Liége, F. Capit. N° 3808.

(IV) *Regula Cos, of algebra zijnde de alder-konstrijcksten Regel om het ombekende bekent te maken... Door J. R. Brasser, geadmitteert Landmeeter tot Hoorn... t' Amsterdam bij Gerrit van Goedesbergh Boekverkooper op 't Water aen de Nieuwenbrugh in den Delfsche Bybel. Anno 1663.* In-4° (Bibl. roy. de Belg., V. H. 8068).

(V) 2e Aufl., p. 427.

(VI) Rome, 1668, t. I, pp. 141-156.

(VII) Publiée dans le Bullet. di Bibliog. e di Storia delle sc. mat. e fis. de Boncompagni. Rome, 1874, t. VII. Ces descriptions se trouvent respectivement pp. 108 et 109, 110 et 111, 114.

oversien, ende van alle voorgaende fauten verbetert, ende eyndelyck vermeerdeert met dry Traectaetgens... Leyden, Joris Abrahamsz van der Marsse, voor Jacob Marcus Boeckverkooper, Anno 1615. In-4° (Bibl. de l'Univ. de Louv. Scienc. N° 94).

Voici enfin au complet le titre de la troisième : *Ludolphi a Ceulen De Circulo et adscriptis liber. In quo plurimorum polygonorum latera per irrationalium numerorum griphes, quorum libet autem per numeros absolutos secundum algebraicarum aequationum leges explicantur. Quae insuper accesserunt versa pagina explicabit. Omnia e vernaculo latina fecit, et annotationibus illustravit Willebrordus Snellius R. F. Lugd. Batav. Apud. Jodocum a Colster. Anno 1619.* In-4° (Bibl. communale à Anvers, N° 4867).

(14) C'est l'ouvrage intitulé : *Mathematicae analyseos triumphus, in quo Enneagoni circulo inscripti ad ipsum circulum exhibetur ratio, auctore A. Romano. Lovanii, 1607.* In-f°. Il est devenu des plus rares et je ne l'ai jamais vu. Je ne l'ai pas même trouvé à la Bibliothèque de l'Université de Louvain à laquelle Adrien Romain mourant, légua, on le sait, sa propre bibliothèque.

(15) Ce théorème peut s'écrire :

$$\sin(60 + A) - \sin(60 - A) = \sin A.$$

Il est énoncé pour la première fois par Viète dans les termes suivants :

" Differentia inter Sinus aequidistantium Peripheriarum a LX, tanta est „ quantus sinus dimidiae Peripheriae quâ differunt inter se, id est, integrae „ qua absunt a LX. Et ideo datis Sinubus ad partes XXX, dantur Sinus reliqui „ sola Additionis, vel Subductionis via (*). „

Voilà bien, en effet, l'incontestable mérite du théorème. Le calcul des sinus et des cosinus de 30 degrés, permet d'achever par de simples additions et soustractions le calcul de tous les autres. Delambre le fait remarquer à tout propos dans son *Histoire de l'Astronomie* (**), car il semble tenir singulièrement à ce que la gloire de cette découverte n'échappe pas à son illustre compatriote.

En guise de démonstration Viète se contente de donner une figure. Le raisonnement qu'il faut y adapter peut ensuite s'imaginer sans trop de peine. Ce travail vient d'être fait tout récemment encore par M. Hunrath (***), ce qui me dispense de le recommencer ici.

(16) Coignet établit ici la formule

$$\operatorname{tg} A = R \frac{\sin A}{\cos A}$$

(*) *Canon mathematicus*, p. 16.

(**) Voyez par ex. : *Histoire de l'Astronomie du Moyen Age*, ch. VIII, p. 458.

(***) *Des Rheticus Canon doctrinae triangulorum und Vieta's Canon mathematicus*, publié dans le CANTOR'S FESTSCHRIFT, pp. 228-229.

Il est presque superflu de rappeler qu'on la trouve déjà chez les Arabes, par exemple chez Albategnius et chez Aboulwéfa (*).

(17) Il s'agit ici de la formule

$$\sec A = \frac{R^2}{\cos A}$$

Je ne sache pas qu'on l'ait déjà signalée chez les Arabes, quoiqu'il paraisse probable que tôt ou tard on finisse par la rencontrer dans leurs écrits.

Finkius la démontre dans sa *Geometria rotundi* (**). A cette occasion, guidé par ce scrupule qui le pousse à toujours citer les noms des auteurs qu'il utilise, il prend soin de nous dire que c'est là une formule d'Erasme Rheinhold. On la trouve, en effet, au précepte 8 du *Primus liber tabularum directionum* (***).

(18) Ces trois propositions peuvent s'écrire respectivement

$$(1) \qquad \operatorname{tg}(45 + \tfrac{1}{2} A) - \operatorname{tang}(45 - \tfrac{1}{2} A) = 2 \operatorname{tang} A$$

$$(2) \qquad \operatorname{tang} A + \operatorname{tg}(45 - \tfrac{1}{2} A) = \sec A$$

$$(3) \qquad \sec A + \operatorname{tg} A = \operatorname{tg}(45 + \tfrac{1}{2} A)$$

Coignet, il est vrai, énonce la première, comme si l'on avait :

$$\operatorname{tg}(45 + \tfrac{1}{2} A) - \operatorname{tang}(45 - \tfrac{1}{2} A) = \operatorname{tang} A;$$

mais c'est là de sa part une simple faute de plume. L'exemple numérique qu'il joint à la règle et qu'il calcule correctement le prouve à l'évidence.

Dans les formules (3) et (2), changeons A en 90 — A, il vient :

$$(4) \qquad \operatorname{cosec} A + \cot A = \cot \frac{A}{2}$$

$$(5) \qquad \operatorname{cosec} A - \cot A = \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

(*) Voyez par ex. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 1e Band, 2e Aufl., Leipsig, 1894, p. 694, ou Carra de Vaux, l'*Almageste d'Abû'lwefa*, JOURNAL ASIATIQUE, 1892, p. 420.

Dans ce passage, Carra de Vaux nous apprend qu'on trouve chez Aboulwéfa les quatre formules :

$$\frac{\operatorname{tg} A}{R} = \frac{\sin A}{\cos A}, \quad \frac{\cot A}{R} = \frac{\cos A}{\sin A}, \quad \frac{\operatorname{tg} A}{R} = \frac{R}{\cot A}, \quad \frac{\operatorname{tg} A}{\sec A} = \frac{\sin A}{R}$$

La dernière surtout est intéressante, parce que l'astronome arabe y emploie la sécante, qu'il appelle *diamètre de l'ombre*. Le fait vaut la peine d'être remarqué, car on semblait jusqu'ici attribuer à Copernic la première idée des sécantes trigonométriques (Voyez Cantor, *o. c.*, 2e Band, 2e Aufl., Leips., 1900, p. 472). Nous constatons ici une fois de plus combien Carra de Vaux a raison quand il dit que les formules de la trigonométrie trouvées par les Arabes se sont perdues et qu'elles ont été réinventées par les Latins (Voir ci-dessus, p. 156).

(**) P. 76.

(***) Tubingue, 1554, p. δ_4 r° (Voyez, ci-dessus, p. 158, le titre complet de cet ouvrage).

Sous cette forme nous avons deux formules de Viète, qui les a données sans démonstration dans le *Canon mathematicus*. Delambre les regarde avec raison, comme une des plus belles découvertes de l'algébriste français (*).

Il suit de ces formules que :

$$\cot A = \frac{1}{2}\left(\cot\frac{A}{2} - \operatorname{tg}\frac{A}{2}\right) \tag{6}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{2}\left(\cot\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\right) \tag{7}$$

ce sont encore deux formules du *Canon mathematicus*. Ainsi, avec les tangentes de 45° on aura les tangentes de tous les autres par de simples soustractions. Par de simples additions on aura de même toutes les sécantes (**).

(*) *Histoire de l'Astronomie du Moyen Age*, chap. VII, p. 450, chap. VIII, p. 458, etc., etc.

(**) Voici le texte même du *Canon mathematicus* (p. 11). Il faut se rappeler que Viète nomme les tangentes et les cotangentes des *Féconds;* les sécantes et les cosécantes des *Hypoténuses*.

" Hypotenusa et Faecundus Residuae peripheriae aggregata sunt Faecundus „ Residuae semiperipheriae. „ C'est la formule (4).

" Et ἀνάπαλιν, Faecundus Residuae peripheriae, est Faecundus et Hypote- „ nusa residui Duplae peripheriae. „ C'est-à-dire :

$$\cot A = \cot 2A + \operatorname{cosec} 2A.$$

" Differentia inter Faecundum et Hypotenusam Residuae, est Faecundus „ Dimidiae peripheriae. „ C'est la formule (5).

" Et ἀνάπαλιν, Faecundus peripheriae est differentia inter Faecundum et „ Hypotenusam residui Duplae. „ C'est-à-dire :

$$\cot A = \operatorname{cosec} 2A - \cot 2A.$$

" Ex his consectarium.

„ Datis Faecundis ad partes XLV, dantur Faecundi reliqui, & Faecundorum „ Hypotenusae omnes, solâ Additionis et Subductionis via. „

Littéralement :

" D'où il suit, qu'étant donnés les Féconds de 45°, on a les autres Féconds, „ et toutes les Hypoténuses des Féconds, par la seule voie d'Addition et de „ Soustraction. „

Si le lecteur croit, comme moi, qu'il faut entendre ce dernier passage en ce sens que Viète a déduit les formules (6) et (7) des formules (4) et (5), il prendrait de l'importance dans l'histoire de la trigonométrie; car ce serait alors probablement le premier exemple de formules trigonométriques déduites d'autres par des procédés purement algébriques et sans aucune considération géométrique.

Après des théorèmes de cette importance il devient d'un intérêt un peu secondaire de remarquer, que Coignet emprunte la démonstration de la formule (3) à la *Geometria rotundi* de Finkius (*); que c'est aussi Finkius, qui a mis (4) sous la forme (3); et que c'est enfin dans les *Metrices astronomicae* de Bressieu, publiées en 1581 deux ans après le *Canon mathematicus*, qu'on lit pour la première fois la formule (2) (**).

(19) Dans la figure 17 la lettre D, intersection de FA et de BE, a été oubliée; de plus, on devrait avoir DE = EC.

(20) Les formules qui doivent servir d' " abbreviation sur la reigle de trois „ sont

$$\frac{\sin A}{R} = \frac{R}{\operatorname{cosec} A}, \qquad \frac{\operatorname{tang} A}{R} = \frac{R}{\operatorname{cotang} A}.$$

Elles permettent l'une et l'autre de remplacer une division par une multiplication. C'est là effectivement une " abbreviation „, qui n'était pas à dédaigner quand on ne possédait pas de tables de logarithmes.

(21) La lettre E est oubliée dans la figure; elle se trouve à l'intersection des arcs CO et γF.

Dans cet exemple, Coignet prend pour point de départ la proposition

$$\frac{\sin CE}{\sin BE} = \frac{\sin FG}{\sin BF}$$

et il y fait,

$$CE = 23^\circ\, 1/2 \qquad BE = 90^\circ \qquad FG = 21^\circ.$$

Or, ajoute-t-il, au lieu de calculer

$$\sin BF = \frac{\sin 90^\circ \sin 21^\circ}{\sin 23^\circ \frac{1}{4}} = \frac{100\,000 \times 35837}{39875} = 89873,$$

(*) Liv. V. N° 30, p. 78.

Finkius donne en outre à la page précédente (Liv. V. N° 30, p. 77) une démonstration des formules (2) et (3). Ce sont les deux démonstrations reproduites dans les diverses éditions de la trigonométrie de van Lansberge (Édit. de Leyde, 1591, p. 10; édit. d'Amsterdam, 1631, pp. 9 et 10; édit. de Middelbourg, 1663, pp. 5 et 6) et que Delambre attribue à tort au savant gantois (*Histoire de l'Astronomie moderne*, t. II, p. 41, 42, etc.).

C'est avec moins de raison encore que dans son *Mémoire sur la vie et les travaux de Simon Stevin* (Bruxelles, 1846; § 10, Trigonométrie, p. 51), Steichen dit que (2) est une formule trouvée par ce géomètre.

(**) J'emprunte ce dernier détail aux *Vorles. üb. Gesch. der Trig.* de von Braunmühl, I Teil, p. 187 en note.

il est bien plus expéditif de calculer

$$\sin BF = \frac{\sin 21^\circ \operatorname{cosec} 66^\circ \frac{1}{2}}{\sin 90^\circ} = \frac{35837 \times 250784}{100\,000} = 89873;$$

ce qui est évident, quand les multiplications et les divisions doivent s'effectuer au long sans tables de logarithmes.

(22) C'est sur cette phrase et quelques autres du même genre disséminées à droite et à gauche dans les traités suivants, que je m'appuie pour dire, que ce manuscrit n'est pas un autographe de Coignet, mais une simple copie d'un de ses cours.

Qu'on me permette à ce propos une dernière réflexion :

Si l'on songe que ce cours est donné à Thomas Francquin, quartier-maître général des Archiducs (*) et que Coignet semble avoir donné des leçons analogues à beaucoup d'autres de leurs officiers; si l'on veut bien se rappeler en outre que la trigonométrie était regardée à cette époque, comme l'une des parties les plus relevées des mathématiques supérieures, on ne laisse pas que d'être émerveillé devant le degré de science que ces princes pouvaient trouver à l'occasion chez les seigneurs auxquels ils confiaient la direction de leurs armées.

(*) Voyez l'Introduction, pp. 94 et 95.