Ann. Soc. Scient. Brux. (30) 1906

Et *la limite existe*, puisqu'on l'a obtenue par (β) et (δ) sous forme *immédiatement finie*. Nous pouvons donc écrire, toujours avec la même convention,

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z_0^2} = \text{part. fin.} \left\{ \iiint_W F \frac{\partial^2 G}{\partial z_0^2} \, d\tau \right\} \tag{5}$$

Ce qui équivaut à :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z_0^2} = \text{intégrale finie } (\beta) + \text{intégrale finie } (\delta). \tag{6}$$

L'on obtient alors le résultat sous la forme suivante.

A cause de la forme de G, l'on doit *scinder en deux* le volume ABC par un plan horizontal MN. L'on écrira :

$$u\,(x_0, y_0, z_0) = u' + u'',$$

u' correspondant au volume BCMN,

u'' „ „ „ AMN.

Dans le *premier volume* l'on emploie la formule (5), car on le peut légitimement, et l'on obtient :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\right) u' = 0.$$

Dans le *second volume*, que l'on fera tendre vers *zéro*, l'on n'a pas le droit d'appliquer la formule (5) et l'on applique la formule (6), d'où :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\right) u'' = F\,(x_0, y_0, z_0).$$

Ainsi donc, *l'on ne doit parler des* PARTIES FINIES *des intégrales infinies* qu'en ayant toujours leur expression *immédiatement finie.*

M. Hadamard et moi avons, simultanément, introduit ce

terme (*), qui correspond à un symbole d'un emploi délicat mais très utile.

Le R. P. Bosmans analyse les notes que Gemma Frisius a écrites sur les marges de son exemplaire de l'*Arithmetica integra* de Stifel. Voici le résumé de cette communication :

Les remarques écrites par Gemma Frisius (**), dans les marges de son exemplaire de l'*Arithmetica Integra* de Stifel (***), conservé aujourd'hui à la Bibliothèque de l'Université de Louvain, ont été autrefois signalées par Ph. Gilbert, mais le fait passa inaperçu. C'est que Gilbert eut, peut-être, le tort de ne pas leur consacrer une notice séparée, notice qui eût d'ailleurs pu être fort courte. S'il nomma le manuscrit de Frisius, ce fut en passant et à propos d'un tout autre sujet, la biographie d'Adrianus Romanus (IV) ; encore

---

(*) *Thèse* de M. R. d'Adhémar, déposée en décembre 1903, soutenue en Sorbonne en avril 1904. *Note* de M. J. Hadamard. COMPTES RENDUS, décembre 1903.

J. Hadamard, *Verhandlungen* des III Intern. Math. Kongr. (Teubner, 1905) et R. d'Adhémar, ANN. SOC. SC. BRUXELLES et CIRCOLO DI PALERMO, 1905.

N. B. *Cette Note* résume un Mémoire qui va être inséré dans le JOURNAL DE M. JORDAN.

(**) Gemma Frisius naquit à Dokkum, en Frise, en 1508, et s'illustra comme professeur à l'Université de Louvain. Il mourut dans cette ville, en 1555.

La biographie de Frisius, la plus exacte et la plus complète, est celle d'Ekama, publiée sous le titre de *Verhandeling over Gemma Frisius, den eersten grondlegger tot het bepalen van de lengte op zee* (VERHANDELINGEN DER EERSTE KLASSE VAN HET KONINGLIJK NEDERLANDSCHE INSTITUUT VAN WETENSCHAPPEN, LETTERKUNDE EN SCHOONE KUNSTEN TE AMSTERDAM, zevende deel. Amsterdam, 1825, pp. 215-260).

Gemma Frisius a beaucoup écrit et la plupart de ses ouvrages ont eu de nombreuses éditions, mais il n'en existe pas jusqu'ici de bonne bibliographie.

(***) *Arithmetica Integra Authore Michaele Stifelio. Cum Praefatione Philippi Melanchthonis. Norimbergae apud Iohan. Petreium, Anno Christi M. D. XLIIII. Cum gratia & priuilegio Caesareo atq; Regio ad Sexennium.*

A la dernière page : *Excudebatur Norimbergae apud Ioh. Petreium.*

L'exemplaire de l'Université de Louvain est coté " Scienc. 244. „ Il est signé au haut de la dernière page : " Gemma Frisius, 1544. „ Les notes manuscrites qu'il contient sont très nombreuses et d'une belle écriture, avec peu de ratures et de surcharges.

(IV) *Notice sur le mathématicien louvaniste Adrianus Romanus, professeur à l'ancienne Université de Louvain (XVI^e siècle)*, par Philippe Gilbert, professeur à l'Université de Louvain. REVUE CATHOLIQUE, t. XVII, pp. 277-286, 394-409 et 522-527. Louvain, 1859.

La note à laquelle il est fait allusion ici, se trouve p. 280.

se contenta-t-il de le faire dans une petite note perdue au pied d'une page. L'événement l'a prouvé, malgré la grande notoriété dont jouissait Gilbert, une mention si sommaire ne suffisait pas pour tirer de l'oubli ce travail de son illustre prédécesseur dans la chaire de mathématiques de l'Université de Louvain. Gilbert y disait cependant que les réflexions de Gemma Frisius étaient d'un lecteur de Stifel « parfaitement au courant de la science algébrique de son temps ». Cette phrase aurait dû appeler l'attention, car, au double point de vue de la biographie de Frisius et de l'histoire de l'Université de Louvain, le *Stifel commenté* constitue un document important. Je voudrais réparer ici l'oubli de Gilbert, mais c'est tout ce que je me propose, les réflexions de Frisius se reliant si intimement au texte de Stifel qu'elles n'en sauraient être détachées, ni éditées à part. Tout au plus, essayerai-je de montrer, par quelques indications rapides, le genre de l'auteur.

Et tout d'abord Stifel, comme tant d'autres, s'illusionne et croit avoir résolu l'éternel problème de la duplication du cube. Frisius aperçoit aussitôt le paralogisme du raisonnement. « Falsus est hic auctor, dit-il, oculo credens et non demonstrationi (*). » *Oculo credens,* voilà bien, en effet, la cause de l'erreur de Stifel. Sans être rigoureuse, sa construction est très approchée. Elle est même pleinement suffisante au point de vue graphique, mais au point de vue mathématique, le grand algébriste a le tort d'y admettre, à *l'œil et sans démonstration,* que trois lignes dont les points d'intersection sont seulement très voisins, concourent en un même point. Frisius prouve par une mise en nombre que cette hypothèse conduit à des résultats contradictoires. Soit dit en passant, c'est la méthode encore suivie par Maurice Cantor, dans ses *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (**), pour montrer l'inexactitude de la construction de Stifel.

Un peu plus loin, nous trouvons un essai de démonstration de la règle des signes de la multiplication. Il ne vaut, on le verra, ni plus ni moins que ceux de la plupart des géomètres de l'époque (***)

(*) F° 120 r°.

(**) 2e édit., t. II, Leipzig, Teubner, 1900, p. 410. Cantor y reproduit la figure donnée pour la construction, dans l'*Arithmetica integra*, et y résume, avec son talent ordinaire, la solution de Stifel.

(***) F° 124 v°-125 r°.

« Quod in multiplicatione — in — faciat + licet ex vulgaribus discere exemplis. Ut 6 — 2 homines singuli debent habere 8 — 3 ducatos. Quum ducis 6 in 8 fiunt 48. Sed non sunt 8 aurei ducati, sed — 3; ergo erunt 48 — 18. At nec erant 6 homines, sed — 2; ergo erant primum 48 — 18 — 16, ducendo scilicet 8 in — 2. Tandem vero quia sexies accepisti — 3, non debebas autem accipere illud sed bis minus, certum est et clarum quod — 2 in — 3 facit + 6. Produxit enim 6 in — 3 hunc numerum — 18. Sed non erat sexies accipiendum — 3, sed tantum quater. Ergo erunt bis minus — 3 quam sexies. Itaque fiet in fine 48 — 18 — 16 + 6, hoc est 20 exacte. Sic vides rationem et exemplum. Quanto enim plus accipis huius numeri — 3, tanto minus producitur; quanto vero minus eiusdem accipitur in aliquo numero tanto plus crescit. »

Le chapitre IV du livre I contient une subdivision intitulée par Stifel (*) : « Sequitur utilis quaedam tractatio, ut progressioni Arithmeticae respondeat geometrica progressio »; nous traduirions en langage moderne : théorie élémentaire des logarithmes. Résumant ses impressions, Frisius écrit en marge ces deux mots qui en disent long : « iucunda tractatio » (**), intéressante théorie.

Le triangle arithmétique des coefficients du développement du binôme ne frappe pas moins son attention. Frisius s'y arrête pour y ajouter le nombre des termes du développement de chaque puissance (***).

Je pourrais donner presque indéfiniment des extraits du même genre, mais j'abrège, car ce qu'il y a de plus important, ce sont les observations de Frisius sur le livre III de Stifel. Ce livre traite, on le sait, de la théorie des équations, et Frisius y multiplie les éclaircissements et les critiques. Il est loin d'approuver tout ce qu'écrit Stifel, mais au fond, il l'admire néanmoins sincèrement. Une de ces critiques nous surprend cependant aujourd'hui, et fait bien voir combien les préjugés d'habitude et d'éducation sont un élément important, quand il s'agit de déterminer le degré d'élégance et de facilité d'une méthode.

L'une des parties les moins faites, je crois, et peut-être bien

(*) F° 35 r°.

(**) F° 35 r°.

(***) F° 44 v°.

aussi les plus mal faites, de l'histoire des mathématiques est la résolution des équations à plusieurs inconnues. Au surplus, peu importe, j'en veux retenir aujourd'hui seulement ceci : c'est, en tous cas, Stifel qui *vulgarisa* la méthode consistant à employer pour désigner les inconnues autant de lettres différentes que d'inconnues distinctes. Nous la regardons, avec raison, comme l'un des principaux titres de gloire du géomètre de Wittemberg. Eh bien ! cette belle méthode agace Frisius. Elle n'est, à son avis, qu'une complication inutile et il remarque, à tout bout de champ, qu'on peut s'en passer. C'est, par endroits, à chaque page qu'il écrit en marge : " Haec quaestio non requirit secundas radices (*). — Hic quoque secundis radicibus non est opus (**). — Et haec quaestio secundis radicibus non est opus (***). — Haec quaestio absque secundis radicibus absolvi potest (IV) ". En résumé, dans le chapitre VI du livre III (V), chapitre où se trouvent exposés les principes mêmes de la méthode des secondes racines (entendez : la résolution des équations à plusieurs inconnues), Stifel applique la théorie à trois exemples, et quatre fois Frisius laisse échapper de sa plume la même critique : ces secondes racines étaient inutiles. Ces secondes racines contre lesquelles il s'élève si volontiers, Frisius les manie cependant à l'occasion avec aisance, comme le prouvent notamment les éclaircissements ajoutés au recto du feuillet 310, au verso du feuillet 318 et ailleurs encore.

Un dernier mot pour finir. Je viens de dire tantôt l'admiration, que, malgré les critiques qui lui échappent parfois, Frisius éprouve en réalité pour Stifel. J'aime à relever maintenant, chez Stifel lui-même, une phrase montrant que cette estime était réciproque. Je lis en effet, au milieu du recto du feuillet 98 : " Sequuntur exempla locupletatae regulae falsi per Gemmam Frisium, et est inventum valde egregium. " Venant du prince incontesté des mathématiciens de son temps, aucun éloge ne pouvait être plus flatteur pour le professeur de l'Université de Louvain.

(*) F° 252 v°.
(**) F° 253 r°. Il s'agit ici d'une seconde solution de l'exemple précédent.
(***) F° 253 v°.
(IV) F° 255 r°.
(V) Chapitre intitulé : " De perfectione regulae algebrae et de secundis radicibus. "

M. Mansion lit la notice suivante *Sur la méthode des moindres carrés dans le Nachlass de Gauss :*

Le tome VIII des *Œuvres* de Gauss (Leipzig, Teubner, 1900) renferme des extraits de lettres et des papiers de l'illustre géomètre sur la méthode des moindres carrés, que nous croyons devoir résumer, parce qu'ils constituent une contribution assez importante à l'histoire et à la critique de cette méthode célèbre.

I. HISTORIQUE. 1. *Invention de la méthode sous la première forme* (1794). Gauss, dans la *Theoria motus corporum in sectionibus conicis solem ambientium* (Hambourg, Perthes et Besser, 1809, p. 242, n° 186; de même, dans l'édition fac-simile de Schering) affirme qu'il employait la méthode des moindres carrés depuis 1795. Dans l'annonce qu'il a faite lui-même de la *Theoria motus,* dans le numéro du 17 juin 1809, des *Göttinger gelehrten Anzeigen* (WERKE, t. VI, pp. 59 et 60), il dit la même chose et affirme, en outre, en avoir parlé à ses amis, même avant 1795. D'après diverses lettres à Olbers (30 juillet 1806, WERKE, VIII, pp. 138 et 139), à Schumacher (3 décembre 1831, IB., p. 138; 6 juillet 1840, p. 141), c'est depuis 1794 que Gauss a employé la méthode des moindres carrés.

Dès cette époque, Gauss trouve la méthode des moindres carrés si naturelle, qu'il croit (à tort, du reste, comme il le remarque) qu'elle a été employée par Tobie Mayer (WERKE, VIII, p. 141, lettre à Schumacher du 6 juillet 1840); plus tard, il s'étonne encore (WERKE, VIII, p. 140, lettre à Olbers du 24 janvier 1812) qu'elle n'ait pas été trouvée et employée par Euler, Lambert, Tobie Mayer, Halley.

2. *Invention sous la seconde forme* (1798). Il est très probable que Gauss a d'abord exposé la méthode des moindres carrés sans recourir au calcul des probabilités, à peu près comme Legendre (lettre à Olbers du 30 juillet 1806, WERKE, VIII, pp. 138 et 139); dans ses cours, c'est par là qu'il commençait (lettre à Schumacher du 25 novembre 1844; IB., pp. 147 et 148). Mais dès 1798, dit-il dans une lettre à Olbers du 24 janvier 1812 (WERKE, VIII, p. 140), il a défendu le calcul des probabilités contre Laplace. Il s'agit sans doute de la théorie des erreurs datant de 1792, mais exposée en 1799 dans la *Mécanique céleste,* 1re partie, livre III, nos 39-40. C'est donc vers cette époque, comme il le dit encore ailleurs (WERKE, IV, p. 68), que Gauss a pu rattacher la méthode des moindres carrés