et ensuite de

$$(m - p)^2 - \sum(\alpha_i - \beta_i)^2 = [m^2 + p^2] - \left[\sum\alpha_i^2 + \sum\beta_i^2\right]$$

nouveaux éléments ponctuels du plan, distincts entre eux ou réunis par groupes.

Le R. P. Bosmans, S. J., présente à la Section une note *sur un exemplaire de la première édition de la « Rabdologie » de Neper qui a échappé à l'incendie de la Bibliothèque de l'Université de Louvain.*

La première édition du *Calcul par les baguettes* publiée en 1617 par Neper est intitulée : *Rabdologiae Seu Numerationis Per Virgulas Libri Duo : Cum Appendice de expeditissimo Multiplicationis Promptuario. Quibus accessit & Arithmeticae Localis Liber Vnus. Authore & Inventore Ioanne Nepero, Barone Merchistonii, &c. Scoto. Edinburgi, Excudebat Andreas Hart, 1617.* C'est un petit volume in-12 de (12) et 154 pages, plus 4 planches hors texte. Il est devenu fort rare ; mais l'intérêt principal de l'exemplaire que je décris ici est d'avoir échappé à l'incendie de la Bibliothèque de l'Université de Louvain. Je dis dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES (1), au commencement de mon mémoire sur la « *Thiende* » de Simon Stevin, par quel heureux hasard les ouvrages de Neper possédés par la Bibliothèque ont été sauvés du désastre. Je n'y reviens pas.

La *Rabdologia* de Neper n'a pas dans l'histoire de l'arithmétique l'importance de la « Thiende » de Stevin, épargnée comme elle par les flammes ; mais le grand nom de l'auteur appelle cependant sur elle l'attention. Aussi, tous les historiens des mathématiques consacrent-ils quelques pages à la *Rabdologia*. Je nommerai Montucla (2), Kaestner (3) et Cantor (4), pour m'en

(1) Janvier, 1920.

(2) HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES... t. II... Paris, Agasse, An VII, pp. 25 et 26.

(3) GESCHICHTE DER MATHEMATIK... t. III... Göttingen, Johan Georg Rosenbuch, 1799 ; pp. 95 et 96.

(4) VORLESUNGEN UEBER GESCHICHTE DER MATHEMATIK... t. II... Leipzig, Teubner, 1900 ; pp. 723 et 724.

tenir aux principaux. Toutefois, l'étude, à ma connaissance, la plus complète qui ait été consacrée à ce volume est celle de Gravelaar, dans ses *John Napier's Werken,* publiées dans les VERHANDELINGEN DER KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM (1). Le regretté professeur de Deventer me semble y avoir épuisé le sujet. Malheureusement le hollandais, dont il a fait usage, nuit au succès de son beau travail, en le mettant hors de la portée de la plupart des lecteurs étrangers aux Pays-Bas. Je ne me propose, ni de le recommencer, ni même de le résumer ici. Mon intention est simplement de faire entrevoir l'originalité des calculs mécaniques imaginés par Neper.

Dans l'Épître dédicatoire de la *Rabdologia*, Neper indique clairement le but qu'il poursuivit en l'écrivant : aplanir les difficultés de la multiplication et de la division. Ce fut l'objectif de sa vie entière, et faut-il rappeler avec quel succès il l'atteignit ? Remplacer les opérations « naturelles », dit-il (2), (entendez : la multiplication, la division, et l'extraction des racines carrées et cubiques) les remplacer par des additions, soustractions et divisions par 2 ou par 3, voilà ce qu'il se proposa jadis en donnant au public ses logarithmes. Aujourd'hui il veut faire mieux, si possible, ou du moins tenter autre chose. Il va donc expliquer de nouveaux procédés de calcul, les uns par des bâtonnets gradués, les autres par des jetons disposés sur un échiquier d'après des règles déterminées. Ce sont là autant de méthodes de son invention. A maintes reprises il les a communiquées déjà à des amis. Elles ont eu quelque succès et commencent à se répandre. S'il n'y prend garde et ne se hâte de les publier, bientôt il devra s'appliquer à lui-même le vers mélancolique de Virgile :

« Hos ego versiculos feci », etc.

(1) Eerste Sectie. Deel VI, N° 6. Amsterdam, Johannes Muller ; april 1899. Le tiré à part que j'ai seul sous la main a 160 pages et trois planches hors texte. En tête se trouve un beau portrait de Neper. Lors de l'apparition du travail de M. Gravelaar, j'en ai rendu compte dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, janvier 1903, pp. 326-335 (dans mon bulletin d'*Histoire des Mathématiques et des Sciences).*

(2) *Rabdologia,* Epistola dedicatoria.

Montucla (¹) et d'autres après lui se sont demandé si c'est bien postérieurement aux logarithmes que Neper a imaginé ses instruments à calculer. Les procédés qui président à leur emploi lui paraissent si inférieurs à la méthode géniale des logarithmes ! Ce serait plutôt après avoir constaté la médiocrité des résultats obtenus par ses instruments, que Neper aurait donné toute son attention à sa principale découverte. Tel est du moins l'avis de Montucla.

Peut-être a-t-il raison. Pour moi, je n'en suis pas aussi convaincu que lui. Neper a un faible visible pour ses instruments, souvent fort ingénieux, il sied de le reconnaître. Ils deviennent même tout à fait curieux, si, au lieu de rechercher la rapidité du calcul, on n'y voit qu'une simple récréation mathématique. Nous en donnerons tantôt des exemples.

« Je doute qu'aucun arithméticien ait jamais pratiqué ces instruments que par forme d'amusement », dit encore Montucla. Cette fois j'en demeure d'accord. Mais, mettons-nous au point de vue de Neper, je veux dire à celui de l'inventeur des méthodes. L'idée première des logarithmes n'est pas de lui. Il l'a trouvée en termes clairs et précis dans un ouvrage alors fameux, l'*Arithmetica Integra* (²) de Stifel. Tous les savants la connaissaient, et les plus autorisés d'entre eux y avaient certainement remarqué les logarithmes. A preuve notre illustre Gemma Frisius, qui en regard de leur exposé par Stifel écrivait en marge, dans son exemplaire, ces mots significatifs : « Jucunda tractatio » ; littéralement, « Théorie agréable » ; nous dirions aujourd'hui « élégante ». Sans doute, ni Gemma Frisius, ni aucun de ses contemporains n'allèrent plus loin que Stifel. Mais, plus qu'aucun autre, Neper dut être frappé par ce que l'*Arithmetica Integra* contenait déjà. La crainte des critiques et des envieux toujours prêts à dénigrer les plus belles découvertes l'impressionna probablement. Voilà, je crois, ce qui semble l'empêcher parfois de bien juger lui-même l'importance relative de ses propres découvertes ; la *Rabdologia* était plus personnelle, plus complètement de lui.

(¹) *Loc. cit.*

(²) *Arithmetica Integra. Authore Michaele Stifelio. Cum Praefatione Philippi Melanchtonis.* Norimbergae apud Iohan. Petreium, Anno Christi M.D.XLIIII ; f° 35, v°.

L'exemplaire annoté par Gemma Frisius a péri dans l'incendie de la Bibliothèque de l'Université de Louvain ; perte comme tant d'autres, hélas ! irréparable. J'ai consacré jadis une note à cet exemplaire dans les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE (tome XXX, 1905-1906, 1re partie, pp. 165-168). Mon but était à ce moment d'appeler l'attention sur les notes du célèbre professeur. Que n'ai-je été alors plus complet !

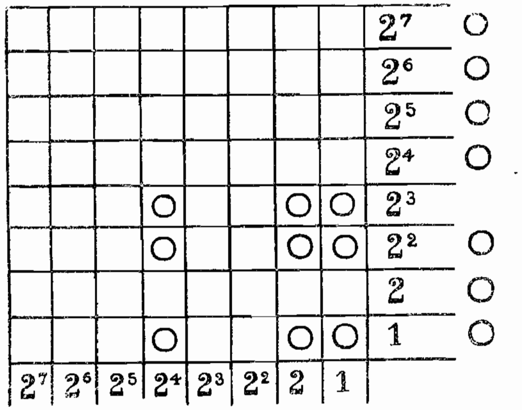
Dans tout ceci je me mets, je le répète, au point de vue de Neper, car pour nous, point d'hésitation possible, les logarithmes sont et resteront toujours le plus brillant titre de gloire du baron écossais. Faut-il aller jusqu'à le proclamer l' « inventeur » des logarithmes ? A mon avis, non ; mais pour la raison générale qui m'a plusieurs fois engagé déjà à répudier ce qualificatif d'« inventeur » dans l'histoire des mathématiques. La théorie des logarithmes a progressé à l'allure ordinaire de la plupart des grandes théories mathématiques. Je veux dire que les précurseurs n'ont pas manqué à Neper ; mais ils restèrent dans leur rôle de précurseurs. Pour lui, il vit clairement, ce que les premiers créateurs des logarithmes n'avaient fait qu'entrevoir, la richesse, la fécondité, l'utilité surtout de cette conception ; et en la développant il édifia cet admirable corps de doctrine des logarithmes, qui nous rend encore journellement de si grands services. Voilà son vrai, son incontestable mérite, et voilà aussi le mérite ordinaire de presque tous ceux auxquels, à tort ou à raison, l'histoire des mathématiques a donné le nom d'« inventeur ». Mais, pour être plus conforme à la vérité, cette mise au point des grands hommes n'enlève rien à leur mérite, ni à leur gloire. Elle nous les montre sous un jour différent, voilà tout. On ne saurait trop le répéter. Le lecteur me pardonnera d'y insister chaque fois que j'en ai l'occasion.

Revenons à la *Rabdologia*.

Le petit volume de Neper se compose de deux traités absolument distincts, annoncés d'ailleurs l'un et l'autre dans le titre, la *Rabdologia* et l'*Arithmetica Localis*.

La *Rabdologia* ou *Calcul par les baguettes* se divise en deux livres, subdivisés eux-mêmes respectivement en neuf et huit chapitres, le tout suivi d'un Appendice en quatre chapitres. Cet Appendice intitulé *De expeditissimo Multiplicationis Promptuario* est plus spécialement consacré à la multiplication des grands nombres.

L'*Arithmetica Localis* ou *Arithmétique de position,* est divisée en onze chapitres. La remarque fondamentale, qui en dernière analyse y guide Neper, c'est que dans le système de numération binaire les quatre premières opérations de l'arithmétique atteignent leur maximum de simplicité. Cela étant, soit un échiquier carré d'un nombre arbitraire de cases ; 64 pour fixer les idées. Numérotons ces cases suivant les puissances successives de 2, depuis 2^0, de la droite vers la gauche, et aussi de bas en haut, comme l'indique la figure (1).



De simples jetons faisant l'office du chiffre 1 permettront d'écrire sur l'échiquer un nombre quelconque, les cases laissées vides jouant, comme dans les anciens abaques, le rôle du zéro de position. Deux nombres étant écrits de la sorte, leur multiplication ou leur division deviennent aussi aisées que la multiplication ou la division de deux puissances de 10 dans le système de numération décimal. Elles se font par un simple déplacement des jetons sur l'échiquier. Toute la difficulté du problème consiste à passer rapidement du système décimal au système binaire et réciproquement. Neper donne dans ce but des tables assez ingénieuses (1), que les bornes imposées à cette note ne me permettent ni de reproduire, ni d'expliquer.

(1) L'échiquier gradué et chargé de jetons que le lecteur a sous les yeux est la réduction à un simple *schema* de la figure de la page 138. Neper la destinait à expliquer le mécanisme du produit

$$19 \times 13 = 247$$

ou en numération binaire

$$10011 \quad 1101 = 11110111$$

Sur l'échiquier se lisent les trois produits partiels et à droite en colonne le résultat de leur addition. Au commencement de l'opération le multiplicateur se place sur le bord de l'échiquier à gauche en colonnes ; le multiplicande en dessous en ligne. Au moment de l'addition le calculateur les enlève comme devenus inutiles.

La *Rabdologia* est une méthode de calcul à l'aide de règles graduées ; Neper dit : à l'aide de bâtonnets, *per virgulas*. Les bâtonnets de l'Appendice sont larges et plats ; ceux des deux livres qui forment le corps de l'ouvrage sont étroits, épais, à quatre faces égales, semblables à nos règles de classe ou de bureau. Les graduations diffèrent, d'après le but à atteindre. Voici une des plus simples et qui eut le plus de succès (2). L'auteur la destinait à la multiplication et à la division. Appliquée à la division son utilité est contestable ; mais pour la multiplication elle donne un procédé qui ne manque pas d'élégance.

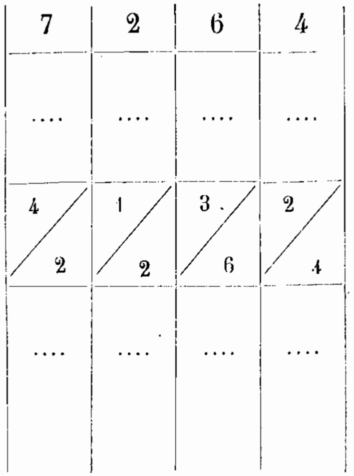
Chacune des faces de la règle est partagée, dans sa longueur, en neuf carrés égaux. Les carrés eux-mêmes sont divisés en deux triangles par la diagonale qui descend de l'angle supérieur de droite vers l'angle inférieur de gauche.

Sur chaque face des règles, et surmontant les colonnes de carrés, se lit, bien mis en vedette, l'un des neuf premiers chiffres, et aussi le 0. Dans les carrés, sont inscrits les produits successifs du chiffre placé en tête de la colonne, par les neuf premiers nombres. Le chiffre des unités s'écrit dans le triangle inférieur du carré ; le chiffre des dizaines, dans le triangle supérieur. Si ce dernier chiffre fait défaut, le triangle est laissé vide ou rempli par un zéro.

Soit maintenant à effectuer une multiplication. On commence par écrire le multiplicande à l'aide des règles, en se servant des chiffres inscrits au haut des colonnes en guise de caractères, et en plaçant les règles bien à la même hauteur les unes à côté des autres.

(1) Ch. 2 et 3, pp. 117-123.
(2) Ch. I, pp. 1-10.

Les produits partiels du multiplicande par les neuf premiers nombres se trouvent alors écrits horizontalement au-dessous de lui à peu près effectués. Il suffit de les transcrire, au fur et à mesure des besoins, en achevant de tête quelques additions faciles [1]. Le *schema* ci-dessous donne la manière dont se présenterait le produit $7264 \times 6 = 43584$. La règle d'après laquelle se font les additions saute aux yeux.



Dans une note consacrée aux fractions décimales [2], Neper saisit l'occasion de louer la « Disme » de Simon Stevin. « Doctissimus ille mathematicus Simon Stevinus in sua Arithmetica Decimali », dit-il, « Ce très savant mathématicien Simon Stevin dans son Arithmétique Décimale ». Puis, après avoir prôné la méthode du géomètre flamand, il fait cette observation importante, qu'une simple virgule remplace avantageusement l'appareil encombrant des petits cercles du Brugeois. Écrivez 1993,273, dit Neper [3], cela se lit 1993 entiers 273 millièmes, ou $1993\,\frac{273}{1000}$.

(1) Lib. I, ch. 2, pp. 10-15. Neper y prend pour exemple le nombre 1615, « l'année 1615 », dit-il. J'ai imaginé celui que je présente au lecteur, comme peut-être plus parlant.

(2) Pp. 21-23. *Admonitio pro decimali Arithmetica.*

(3) P. 22.

C'est donc à Neper qu'est dû l'emploi systématique de la virgule décimale ; il valait la peine de le remarquer.

Je ne puis terminer cette note relative à la *Rabdologia* sans rappeler à ce propos combien la Bibliothèque de l'Université de Louvain était riche en éditions anciennes dans tous les domaines de la science. Outre l'édition princeps dont je viens de parler, elle possédait aussi la 2e : Lugduni, Typis Petri Rammasenij, M.DC.XXVI. Il lui manquait la 3e (Leyde, 1628). Mais, elle avait en revanche l'intéressant résumé qu'Adrien Metius en avait donné dans son *Manuale Arithmeticae et Geometriae Practicae....* Tot Amsterdam, By Hendrick Laurensz .. Anno 1634. Ces volumes ont été sauvés.

Le R. P. Bosmans fait ensuite une communication *sur les derniers travaux de M. Zeuthen, relatifs aux mathématiques des Grecs*, travaux au nombre de trois. Le premier, écrit en danois, est intitulé, dans l'analyse française très développée qui l'accompagne, « Sur la réforme qu'a subie la mathématique de Platon à « Euclide et grâce à laquelle elle est devenue science raisonnée ». C'est un mémoire développé, de 180 pages, inséré dans la collection in-4° des Mémoires de l'Académie de Danemark.

Les deux autres : « Sur l'origine historique de la connaissance des quantités irrationnelles » et « sur l'origine de l'algèbre », ont paru en français, dans le Bulletin in-8° de la même Académie, et traitent de questions rentrant dans le cadre du premier mémoire.

La conclusion de M. Zeuthen peut se résumer comme suit : Platon a trouvé la géométrie dans un état assez avancé et a entrevu que les mathématiques peuvent être bâties tout entières sur un petit nombre de définitions, de postulats et d'axiomes. Il a proposé cette idée, comme objet d'études et de recherches, à ses élèves. Les Éléments d'Euclide sont le résultat de leurs efforts.

La communication complète du R. P. Bosmans paraîtra dans la Revue des Questions scientifiques.

M. Lecat reprend, en lui donnant de nouveaux développements, une communication déjà présentée à la Section en 1914, *sur quelques problèmes au sujet des déterminants généraux, ou fonctions analogues, à premiers mineurs nuls.*