Ann. Soc. Scient. Brux. (29), 1904-5

M. C.-J. de la Vallée Poussin fait quelques remarques sur l'intégration des expressions différentielles homogènes immédiatement intégrables.

Le R. P. Bosmans, S. J., analyse trois ouvrages célèbres d'Adrien Romain, dont il n'avait cité que les titres dans la note 13 de son mémoire sur les *Méthodes d'Adrien Romain pour effectuer les calculs des grands nombres* (*).

I. Le PROBLEMA APOLLONIACUM (**), petite brochure in-4° de 20 pages, titre compris, a pour objet, on le sait, de résoudre le problème : Décrire une circonférence touchant trois cercles donnés.

Au verso du titre, un texte emprunté à Geminus.

Puis vient une dédicace de quatre pages, adressée : „ Perillustri ac Reverendissimo Domino, F. Angelo Rocca a Camerino, Eremitae Augustiniano, Sacrae Theologiae Doctori, et Sacrarii Apostolici Antistiti, Domino suo plurimum colendo, A. Romanus S. „ A. Romain commence par y raconter l'histoire de sa controverse avec Viète et les circonstances dans lesquelles le problème lui a été proposé, en guise de défi, par le mathématicien français. Il nous y apprend entre autres détails curieux que son ami Ludolphe van Collen lui avait envoyé une solution de son équation du 45e degré avec 27 chiffres exacts. Puis il établit le P. Ange Rocca juge du tournoi, le priant de s'adjoindre l'astronome Magini, le jésuite Clavius et, s'il le trouve opportun, d'autres savants de marque, à l'exclusion toutefois des Belges et des Français, qu'on aurait pu soupçonner de jouer à la fois le rôle de juge et de partie.

(*) ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE, t. XXVIII, IIe partie, pp. 411-429.

Je n'avais pas encore eu l'occasion de voir ces volumes, quand j'ai présenté mon mémoire à la Société scientifique. Depuis, ils ont été obligeamment mis à ma disposition à Bruxelles par la Bibliothèque ducale de Wolfenbüttel et par celle de l'Université de Munich. Qu'elles veuillent bien agréer ici l'expression de mes plus vifs remerciements.

(**) Je renvoie à mon premier mémoire, pour les renseignements bibliographiques en y ajoutant cependant que le *Problema Apolloniacum* existe à la Bibliothèque Nationale de Paris et à l'Observatoire de Pulkova. Je me sers de l'exemplaire de Wolfenbüttel.

Chap. I. — *Énoncé du problème de Viète.* — „ Étant donnés les rayons de trois cercles et les distances de leurs centres, le rayon du cercle qui les touche et les distances de son centre aux centres des autres cercles sont donnés. „

Chap. II. — *Nombre des solutions du problème de Viète.* — Romain explique longuement en s'aidant d'une figure assez superflue que le problème admet huit solutions.

Chap. III. — *Toutes les solutions du problème ne sont pas toujours possibles.* — Discussion incomplète, comme l'auteur le remarque lui-même.

Chap. IV. — *Solution de quelques cas particuliers.* — A. Romain, nous le verrons plus loin, ramène la solution générale du problème à une intersection de deux branches d'hyperboles. Mais quand deux des cercles donnés sont égaux, la branche d'hyperbole qui correspond aux deux contacts extérieurs ou aux deux contacts intérieurs se réduit à une droite. Il n'était pas dans les idées des géomètres de la fin du XVIe siècle de regarder cette hypothèse comme un simple cas particulier de l'hypothèse générale; aussi Romain la traite-t-il à part et au long. Comme elle donne d'ailleurs lieu à des constructions plus simples que la solution générale, il était indiqué de commencer par elle.

1er cas : Les trois cercles donnés sont égaux et occupent les sommets d'un triangle ABC.

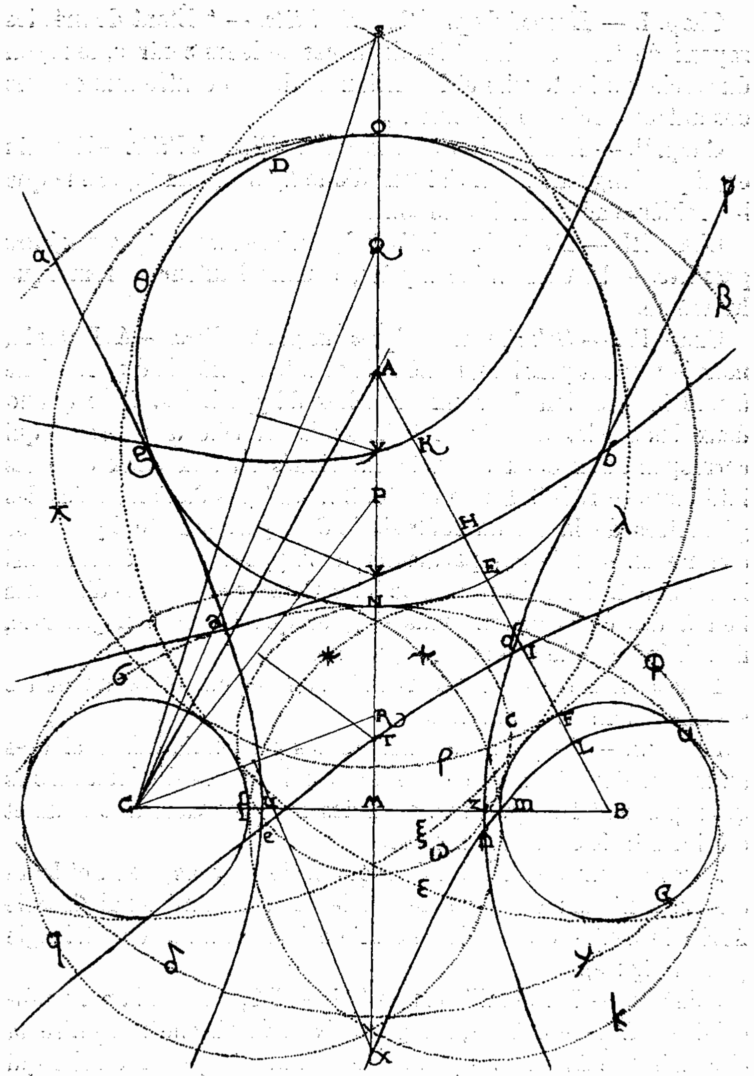
Solution. — Le point de concours des perpendiculaires élevées au milieu des côtés de ce triangle est le centre de deux cercles qui répondent à la question, celui des trois contacts intérieurs et celui des trois contacts extérieurs.

2e cas : Deux des cercles donnés ont des rayons égaux et leurs centres sont aux sommets des angles B et C d'un triangle isocèle ABC; le centre du troisième cercle est au sommet A du triangle (voir la figure).

Solution. — Par le milieu M de la base BC, élevons la perpendiculaire MA à cette base; les points N et O, où elle rencontre la circonférence A, sont les points de contact de quatre cercles qui répondent à la question.

Pour achever la construction, désignons par r le rayon des deux cercles égaux, et prenons sur MA

$$NR = NP = OQ = OS = r;$$


Reproduction légèrement réduite de la figure originale, d'après une photographie. Les points D et G sont supposés se trouver sur le prolongement de AB.

puis par les milieux de CR, CP, CQ, CS élevons des perpendiculaires. Elles déterminent sur AM, les points X, T, V, Y, centres de ces quatre cercles.

3e cas : Les cercles donnés se touchent tous les trois en un même point. Le problème admet évidemment alors une infinité de solutions.

Chap. V. — *Démonstration de sept lemmes nécessaires à la solution du problème d'Apollonius.* — " La solution générale du problème, dit Romain, dépend de la détermination de la ligne qui est le lieu des centres des troisièmes cercles, touchant les cercles donnés pris deux à deux de toutes les manières possibles. Nous traiterons cette question en sept lemmes. "

Lemme I. — Si les deux cercles donnés sont égaux, le lieu des centres des troisièmes cercles qui les touchent tous les deux intérieurement ou tous les deux extérieurement est la perpendiculaire élevée au milieu de la ligne des centres des premiers cercles.

Lemme II. — Si les cercles donnés sont inégaux, le lieu des centres des cercles qui les touchent intérieurement est une branche d'hyperbole.

Lemme III. — Si les cercles donnés sont inégaux, le lieu des centres des cercles qui les touchent extérieurement est une branche d'hyperbole.

Lemme IV. — Que les cercles donnés soient égaux ou inégaux, le lieu des centres des cercles qui touchent l'un d'eux intérieurement et l'autre extérieurement est une hyperbole.

Démonstration des quatre premiers lemmes. — Romain remarque que le premier lemme est intuitif. Quant aux trois derniers, il explique longuement, en s'aidant de trois petites figures, que dans le cas des lemmes II et III, la différence des distances d'un point du lieu aux centres des deux cercles donnés est égale à la différence de leurs rayons; et que dans le cas du lemme IV, cette différence est égale à la somme des rayons. Il ramène ainsi le problème à la 51e proposition du livre III des *Coniques* d'Apollonius.

Lemme V. — Déterminer sur la ligne des centres l'axe transverse de ces hyperboles et leurs deux " Appendices ", c'est-à-dire les deux segments déterminés de part et d'autre de l'axe transverse par les foyers et les sommets réels.

Longue démonstration divisée en quatre parties. Je résume la première en langage moderne, mais en suivant pas à pas l'ordre des raisonnements de l'auteur.

Prolongeons la ligne des centres AB et soient D, E, F, G, les points d'intersection de AB avec les circonférences données (voir la fig.).

Premier cas (correspondant au lemme II). Soit H le milieu de DG.

Prenons $$BI = AH.$$

Je dis que HI est égal à la différence des rayons des cercles, et que par conséquent H et I sont les sommets réels et HI l'axe transverse de l'hyperbole.

Car, par construction,
$$GH = DH$$
donc
$$GH - BI = DH - AH$$
ce qui peut s'écrire
$$GB + IH = DA$$
d'où
$$IH = DA - GB.$$

Deuxième cas (correspondant au lemme III). Soit I le milieu de EF. Prenons AH = BI; HI est de nouveau égal à la différence des rayons des cercles; par conséquent H et I sont les sommets réels et HI l'axe transverse de l'hyperbole.

Troisième cas (correspondant à la première partie du lemme IV; contact intérieur avec le cercle A, extérieur avec le cercle B). Soit K le milieu de DF. Prenons BL = AK. Je dis que KL est égal à la somme des rayons des cercles, et que par conséquent K et F sont les sommets réels et KF l'axe transverse de l'hyperbole.

Quatrième cas (correspondant à la seconde partie du lemme IV; contact extérieur avec le cercle A, intérieur avec le cercle B). Soit L le milieu de EG. Prenons AK = BL. Je dis que KL est de nouveau égal à la somme des rayons des cercles et que par conséquent K et L sont les sommets réels et KF l'axe transverse de l'hyperbole.

A. Romain démontre tous ces cas au long, sans faire grâce au lecteur du moindre raisonnement intermédiaire. C'était conforme

aux habitudes du temps. Suivant les mêmes habitudes, il lui restait encore à démontrer que les lieux trouvés dans les deux premiers cas et ceux trouvés dans les deux derniers étaient composés chaque fois par les " sections opposées ", c'est-à-dire les deux branches d'une même hyperbole. C'est le but des lemmes VI et VII.

Lemme VI. Trouver le paramètre (latus rectum) des hyperboles précédentes. Soit $2p$ le paramètre, $2c$ la distance des foyers et $2a$ l'axe transverse. La valeur du paramètre est

$$2p = 2.\frac{c^2 - a^2}{a}$$

A. Romain énonce deux théorèmes qui équivalent évidemment à la formule précédente. Nous les écririons, comme suit, en notations modernes :

$$(c - a) \times [2a + (c - a)] = a \times p$$

et

$$\frac{a}{c - a} = \frac{2a + (c - a)}{p}.$$

Lemme VII. — Les hyperboles trouvées dans les deux premiers cas sont deux " sections opposées ". Il en est de même des hyperboles trouvées dans les deux derniers. Car, dit Romain, elles ont le même axe transverse et le même paramètre. Cela revenait à dire qu'elles avaient la même équation. On sait en effet que la proposition 12 du livre I des *Coniques* d'Apollonius est l'équivalent de l'équation de l'hyperbole écrite sous la forme

$$y^2 = \frac{p}{a}(x^2 - a^2).$$

Chap. VI. — *Solution du problème de Viète.* — En combinant deux à deux les lieux géométriques précédents, ce qu'A. Romain fait tout au long, il détermine les huit solutions dans l'ordre suivant : V, *b*, *g*, Y, X, *n*, *e*, T (voir la fig.).

Il donne ensuite trois théorèmes utiles, dit-il, au tracé des coniques. Au point de vue moderne ce ne sont que les théorèmes I, 20, III, 51 et 52 des *Coniques* d'Apollonius, sous un énoncé un peu différent. Je n'y insiste pas.

L'ouvrage se termine par une postface triomphante à Viète, dans laquelle A. Romain n'hésite pas à se décerner à lui-même le titre d' " Apollonius belge " ; vanité assez ridicule puisqu'il n'avait pas résolu le problème. Il tenait cependant la clef d'une solution, comme Newton le fit voir, un siècle plus tard, en démontrant au lemme 16 du premier livre des *Principes,* que le point d'intersection des hyperboles d'Adrien Romain, pouvait se construire par des lignes droites et des circonférences. Cette solution, pas plus qu'A. Romain, Viète ne l'entrevit ; ce qui s'explique aisément par ce fait qu'elle s'appuie sur les propriétés des directrices, dont il n'est pas parlé, on le sait, dans les *Coniques* d'Apollonius.

II. — La CHORDARUM ARCUBUS CIRCULI PRIMARIIS, QUIBUS VIDELICET IS IN TRIGINTA DIRIMITUR PARTES, SUBTENSARUM RESOLUTIO (*), grand volume in-folio oblong de 58 feuillets, se présente au point de vue typographique, sous un aspect tout à fait anormal. A la manière des atlas, il n'est imprimé que d'un côté des feuillets, deux pages blanches y alternant avec deux pages imprimées qui doivent se lire en regard l'une de l'autre, comme si elles n'en faisaient qu'une seule. Mais ce qu'il y a de plus extraordinaire, c'est que la moitié d'un grand nombre de pages est imprimée à l'envers. Cette disposition incommode, adoptée pour gagner de la place, oblige le lecteur à retourner continuellement le volume, ce qui en rend le maniement des plus désagréables.

Il faut remarquer encore d'autres singularités typographiques, mais pour les faire comprendre je m'attacherai à un exemple concret, en tâchant d'expliquer la disposition des calculs de $\sqrt{5}$, par exemple, que l'auteur détermine avec 300 décimales.

Considérons quatre groupes de deux feuillets, et imaginons-les, placés deux à deux sur leur face blanche, en quatre rangs, les uns au-dessous des autres, de manière à avoir sous les yeux une seule immense feuille imprimée. Divisons cette feuille de haut en bas en

(*) L'exemplaire de l'Université de Munich, dont je me sers, est coté : 199 Math. Me fiant à Bierens de Haan, j'ai parlé avec inexactitude de la *Chordarum resolutio,* dans la note 20 de mon mémoire sur les *Méthodes d'Adrien Romain.* Il n'y a pas toujours concordance, entre les titres, les données et les réponses de la *Chordarum resolutio* d'une part, et les calculs qui y sont en réalité effectués. C'est ce qui a induit le savant hollandais en erreur.

quatre colonnes verticales que nous numéroterons 1, 2, 3, 4. L'opération commence au haut de la colonne 2 et la remplit tout entière. Elle se continue ensuite, de *bas en haut,* par la colonne 3, où les chiffres sont imprimés à l'envers et qu'on ne saurait lire par conséquent, sans retourner le volume. Il est clair que quand ce retournement est fait, l'opération se lit de haut en bas. De la colonne 3 le calcul passe à la colonne 4 où les chiffres sont de nouveau droits et qui se lit de haut en bas. Enfin l'opération se termine par la colonne 1, imprimée à l'envers de bas en haut comme la colonne 3, et qui par conséquent doit aussi se lire en retournant le volume.

La *Chordarum resolutio* a pour but de mettre à la disposition du lecteur le détail des calculs qui lui permettent de vérifier l'exactitude de certaines racines carrées d'un usage fréquent dans la construction des tables de lignes trigonométriques naturelles ; notamment, comme le titre l'indique, celles qui servent au calcul du côté du polygone régulier de 30 côtés (*).

La préface à l'Archiduc Maximilien d'Autriche, datée de Wurzbourg le 1er avril 1602, donne de très intéressants détails sur les déboires que subit A. Romain de la part des imprimeurs et des ouvriers typographes, rebutés et découragés par les difficultés de l'impression de son livre.

L'ouvrage lui-même est divisé en huit parties, auxquelles l'auteur donne le nom de " lemmes ".

Lemme I. Extraire $\sqrt{3}$. Le résultat est donné avec 220 décimales et l'extraction est faite d'après la méthode propre à A. Romain, que j'ai exposée dans mon mémoire. Seules cependant les 132 premières décimales sont déterminées au long, par abaissement successif de tranches de deux chiffres. Les 88 dernières sont calculées par une méthode *abrégée,* sans nouvel abaissement de tranches, en continuant l'opération comme précédemment, mais sans tenir compte des dizaines et des unités simples.

(*) Dans les *Ideae Mathematicae* (Pars 4, prop. 7, p. 109), A. Romain donne le côté c du polygone de 30 côtés par la formule :

$$c^2 + \sqrt{\frac{5}{16}R^4} + \sqrt{\frac{15}{8}R^4 + \sqrt{\frac{45}{64}R^8}} = \frac{9}{4}R^2,$$

Lemme II. — Extraire $\sqrt{5}$. Le résultat est donné avec 300 chiffres décimaux, dont les 152 premiers sont déterminés au long, et les 148 derniers par la méthode abrégée.

Cor. I. — Extraire $\sqrt{20}$. — *Rép.* $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Cor. II. — Extraire $\sqrt{180}$. — *Rép.* $\sqrt{180} = 3\sqrt{20}$.

Cor. III. — Extraire $\sqrt{6+\sqrt{20}}$. — *Rép.* $\sqrt{6+\sqrt{20}} = \sqrt{5}+1$.

Cor. IV. — Extraire $\sqrt{6-\sqrt{20}}$. — *Rép.* $\sqrt{6-\sqrt{20}} = \sqrt{5}-1$.

Lemme III. — Extraire $\sqrt{15}$. Résultat donné avec 220 décimales, dont 120 sont calculées au long et 100 par la méthode abrégée.

Cor. I. — Calculer $\sqrt{15}+\sqrt{3}$.

Cor. II. — Extraire $\sqrt{18+\sqrt{180}}$. — *Rép.* $\sqrt{18+\sqrt{180}} = \sqrt{15}+\sqrt{3}$.

Cor. III. — Calculer $\sqrt{15}-\sqrt{3}$.

Cor. IV. — Extraire $\sqrt{18-\sqrt{180}}$. — *Rép.* $\sqrt{18-\sqrt{180}} = \sqrt{15}-\sqrt{3}$.

Dans ces trois premiers lemmes, A. Romain opère par voie d'extraction de racine carrée, mais dans les cinq derniers, tout en posant la question sous forme d'extraction de racine, il fait le contraire, donne la racine et en prouve l'exactitude par une *élévation au carré*. Cette opération est d'ailleurs faite d'après la méthode qui lui est propre et que j'ai exposée dans mon mémoire.

Lemme IV. — Extraire $\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}}$. — Le résultat est donné avec 300 décimales. Le carré des 156 premières est effectué au long, mais celui des 145 dernières l'est par une méthode *abrégée*, qui consiste à ne pas ajouter les deux zéros aux carrés successifs déjà trouvés, puis à continuer à opérer comme précédemment en négligeant les dizaines et les unités simples.

Lemme V. — Extraire $\sqrt{10+\sqrt{20}}$. Résultat avec 220 décimales; 128 calculées au long, 92 par la méthode abrégée.

Lemme VI. — Extraire $\sqrt{10-\sqrt{20}}$ (avec 220 décimales; 126 au long, 94 par la méthode abrégée).

Lemme VII. — Extraire $\sqrt{30+\sqrt{180}}$ (avec 220 décimales; 120 au long; 100 par la méthode abrégée).

Lemme VIII. — Extraire $\sqrt{30-\sqrt{180}}$ (avec 220 décimales; 122 au long; 98 par la méthode abrégée).

Ces extractions de racines et ces élévations au carré *abrégées* donnent à la *Chordarum resolutio* un intérêt tout particulier, car *elles sont probablement le plus ancien exemple imprimé aujourd'hui connu d'opérations de ce genre.* Jusqu'ici la gloire en était demeurée à la *Rabdologia* de Néper, qui est de 1617, et renferme, on le sait, un exemple de multiplication abrégée. A. Romain ne fait malheureusement pas connaître, à quels caractères il reconnaissait le moment où ses méthodes abrégées devenaient applicables (*).

III. Le Mathematicae Analyseos triumphus, in quo lateris Enneagoni inscripti ad Radium circuli exhibetur ratio, est un in-folio oblong de 19 feuillets et de même format que la *Chordarum resolutio,* avec laquelle il a d'ailleurs de nombreuses ressemblances au point de vue de la disposition typographique (**).

La dédicace au duc Jules de Franconie, prince évêque de Wurzbourg est datée : « Ex musaeo nostro Lovanii, anno Christi 1607, die 18ª Junii. »

L'ouvrage est divisé en quatre problèmes dont voici les énoncés abrégés :

Prob. I. — Trouver le rapport au rayon des cordes de 120° et 60°.

Prob. II. — Trouver le rapport au rayon des cordes de 72° et 36°.

Prob. III. — Trouver le rapport au rayon des cordes de 40° et 20°.

Prob. IV. — Trouver le rapport au rayon des cordes de 24° et 12°.

(*) M. Curtze a signalé dans les *manuscrits* de Burgi et dans ceux de Praetorius, quelques exemples de multiplications abrégées encore plus anciens, ce qui tendrait à prouver que cette méthode a été entrevue simultanément par la plupart des grands calculateurs de l'époque. Au surplus, l'origine et le développement des opérations abrégées est un chapitre important de l'histoire de l'Arithmétique, qui reste encore à écrire, presque en entier (voir : *Die abgekürzte Multiplication,* von Maximilian Curtze, in Thorn. Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik. 40. Jahrgang, 1895, pp. 7-13).

(**) L'exemplaire de l'Université de Munich est relié à la suite de la *Chordarum resolutio.*

Les problèmes I, II et IV reviennent évidemment au calcul du côté des polygones réguliers de 3, 6 ; 5, 10 ; 15 et 30 côtés. Aussi A. Romain fait-il remarquer, dans la *Conclusio* (p. 26), qu'ils pourraient se construire géométriquement ; mais il préfère les résoudre en employant, pour le premier et le quatrième, la formule

$$3 \text{ corde } A - \frac{\text{corde}^3 A}{R^2} = \text{corde } 3A,$$

3 A étant l'arc triple de l'arc cherché (c'est-à-dire respectivement : 360°, 180° ; 72° et 36°) ; pour le deuxième

$$5 \text{ corde } A - \frac{5 \text{ corde}^3 A}{R^2} + \frac{\text{corde}^5 A}{R^4} = \text{corde } 5A,$$

5 A étant l'arc quintuple de l'arc cherché (c'est-à-dire 360° et 180°).

Dans les deux premiers problèmes, $R = 10^{112}$ et le résultat est donné avec 113 chiffres ; dans le quatrième, $R = 10^{108}$ et le résultat est donné avec 108 chiffres.

Le problème III, traité avec plus de développements que les autres, est aussi plus intéressant. A. Romain s'y propose d'y calculer les côtés des polygones réguliers de 9 et de 18 côtés. Il fait $R = 10^{108}$ et est amené à devoir résoudre les deux équations du 3e degré.

$$3 \text{ corde } A - \frac{1}{10^{108\times 2}} \text{ corde}^3 A = 10^{108}\sqrt{3},$$

$$3 \text{ corde } A - \frac{1}{10^{108\times 2}} \text{ corde}^3 A = 10^{108}.$$

Il observe d'abord que le problème ne saurait se résoudre par des constructions géométriques et qu'il faut nécessairement recourir à l'algèbre.

Il remarque en outre que chacune des équations à résoudre admet deux solutions (les racines négatives sont pour lui sans signification) et que seule la plus petite convient au but qu'il se propose.

Il donne ensuite successivement, pour chacune des deux équations, avec 108 ou 109 chiffres suivant le cas, par excès et par défaut, à une unité près du dernier ordre, les valeurs de

$$\text{corde } A,\ \frac{\text{corde}^2 A}{R},\ \frac{\text{corde}^3 A}{R^2},\ \text{corde } 3A.$$

Malheureusement il ne fait pas connaître par quelle méthode il détermine corde A. Après cela, il calcule très soigneusement, par excès et par défaut, en ayant soin de prendre dans ce but les valeurs précédentes dans le sens convenable :

$$3 \text{ corde } A - \frac{\text{corde}^3 A}{R^2}.$$

Le résultat concorde avec la valeur donnée à corde 3 A et par conséquent les équations sont vérifiées.

A. Romain ne se contente pas de ces résultats généraux. Il les fait suivre, mais pour la deuxième équation seulement, par les calculs intermédiaires qui lui ont fourni $\frac{\text{corde}^3 A}{10^{108\times 2}}$. Ces calculs sont disposés en grands tableaux à quatre colonnes, analogues à ceux de la *Chordarum resolutio,* dans lesquels les colonnes 1 et 3 sont de nouveau imprimées à l'envers, comme il a été expliqué ci-dessus.

L'élévation au cube est faite conformément à la méthode particulière à A. Romain décrite dans mon mémoire. Il effectue donc d'abord au long, $\frac{\text{corde}^2 A}{10^{108}}$, opération qui est conduite et disposée, comme les élévations au carré de la *Chordarum resolutio.* En réalité il opère non pas sur 108 mais bien sur 178 chiffres, en appliquant toutefois la méthode abrégée aux 75 derniers chiffres.

Puis vient l'élévation au cube proprement dite. Ici les calculs ne sont plus donnés que pour les 88 chiffres des plus hautes unités du nombre proposé, et seuls les 86 chiffres des plus hautes unités du cube sont déterminés. Cette élévation au cube est effectuée au long sur les 57 premiers chiffres. Pour les 31 suivants, A. Romain se sert, une fois encore, d'une méthode abrégée qui consiste à ne plus ajouter des tranches de trois zéros aux carrés successifs déjà trouvés et à continuer les opérations comme auparavant, mais en ne tenant chaque fois compte que des mille et des unités d'ordres supérieurs, en négligeant les centaines, les dizaines et les unités simples.