maintes fois dans les éléments de poids atomiques presqu'égaux deviendrait compréhensible, et la fréquence diverse des éléments se ramènerait simplement à leur *durée vitale* diverse, puisque, selon Rutherford, les éléments qui se décomposent le plus lentement se trouvent en plus grande quantité. Toutefois cette dernière conclusion n'aurait pas actuellement une importance pratique parce que nous ne pouvons examiner que la fréquence des éléments qui se trouvent dans la croûte terrestre et démontrer, au moyen de l'analyse spectrale, la présence des éléments que dans l'enveloppe extérieure des corps célestes. Voici, en tout cas, qui est encore bien remarquable ; l'air vital, c'est-à-dire le gaz oxygène, possède une durée si longue, qu'à lui seul il constitue à peu près la moitié de toute la matière qui nous est accessible.

Enfin il est permis de supposer que le développement ultérieur du système des éléments, qui se réalisera dès qu'on pourra faire entrer dans le domaine du calcul les rayons β, fournira aux générations futures bien des renseignements sur la constitution de l'atome.

NOTES SUR
L'ARITHMÉTIQUE DE SIMON STEVIN

par H. BOSMANS, S. J.

I. — La résolution de l'équation du 2^d degré, dans l'« Arithmétique » de Simon Stevin

Comme toutes les opérations du calcul numérique et de l'algèbre élémentaire, la résolution de l'équation du 2^d degré a passé, pour arriver à sa forme définitive, par une longue série de tâtonnements et d'essais, aussi intéressants que compliqués, parfois tout à fait imprévus et par là même difficiles à suivre. L'état actuel du problème a été donné avec beaucoup d'érudition, il y a quelques années, par M. Tropfke, dans sa *Geschichte der Elementar-Mathematik* (1). Parmi les multiples petits faits accumulés dans ce savant résumé, la part qui revient à l'*Arithmétique* (2) de Simon Stevin est indiquée, il est vrai, en deux ou trois lignes, mais noyée dans l'ensemble du tableau. Le but de cette note est d'y appeler l'attention.

---

(1) T. I, Leipzig, Veit, 1902, pp. 252-265.

(2) *L'Arithmetiqve De Simon Stevin De Brvges : Contenant les computations des nombres Arithmetiques ou vulgaires : Aussi l'Algebre, auec les equations de cinc quantitez...* A Leyde, De l'Imprimerie de Christophle Plantin. CIϽ. IϽ. LXXXV.

L'ouvrage a été réédité deux fois :

L'Arithmetiqve De Simon Stevin de Brvges. Reueüe, corrigee et augmentee de plusieurs traictez et annotations par Albert Girard Samielois Mathematicien. A Leide, de l'Imprimerie des Elzeviers CIϽ IϽC XXV.

Les Œuvres Mathematiques De Simon Stevin de Bruges. Ou sont inserées les Memoires Mathematiques, Esquelles s'est exercé le Tres-haut et Tres-illustre Prince Maurice de Nassau, Prince d'Aurenge... Le tout revue, corrigé, et

Une remarque avant d'entrer en matière. Dans la théorie des équations, les théorèmes de Stevin, en réalité fort clairs, semblent inintelligibles, tant qu'on n'a pas la clef de leurs énoncés. Heureusement que, pour la trouver, l'auteur nous explique lui-même les considérations, qui le guident. A cette occasion, il fait volontiers un peu d'histoire. Histoire fort inexacte, dit M. Tropfke (1). D'accord, mais ces courtes notices ont leur utilité. Stevin est la modestie en personne. Toujours nous le voyons hanté par la crainte de s'attribuer une découverte qui ne lui appartient pas. Ses remarques historiques ont bien moins pour but de faire de l'histoire proprement dite, que de fournir l'indication des sources où il a puisé et de nous donner la « littérature » du sujet, comme diraient les Allemands. A ce titre elles vont nous servir.

Quels auteurs d'algèbre Stevin avait-il étudiés ?

Tout d'abord Mahomet ben Musa el Chowârezmi. Les savants en possédaient alors deux versions latines manuscrites, l'une de Robert de Rétines (2), l'autre de Gérard de Crémone. Stevin avait lu, en outre, Pacivolo, Cardan, Tartaglia, Stifel, Nunes, Bombelli et quelques autres.

Chez tous ces auteurs, l'équation du 2d degré affectait trois formes distinctes, trois « différences », dit Stevin ; mais ces trois « différences » s'écrivaient d'après deux méthodes.

Il y avait d'abord celle de Cardan, Nunes et autres, pour qui l'équation du 2d degré était une pure application numérique d'un

---

augmenté par Albert Girard Samielois, Mathematicien. A Leyde Chez Bonaventure et Abraham Elsevier... CIↃ IↃC XXXIV. L'Arithmétique fait l'objet du tome I.

Dans ces deux dernières éditions, les additions d'Albert Girard se distinguent nettement du texte de Stevin et ne sauraient se confondre avec lui.

Je fais mes citations d'après la première édition, mais, à cause de sa rareté, je renverrai chaque fois aux trois. Je respecte l'orthographe de Stevin, à l'exception toutefois de la ponctuation, des accents et des lettres *i* et *j*, *u* et *v*.

(1) *Geschichte*, t. I, p. 262.

(2) Voir sur cette version : *Robert of Chester's Translation of the Algebra of Al-Khowarizmi*, by L. C. Karpinski, in Ann. Arbor. BIBLIOTHECA MATHEMATICA, 3e sér. t. XI, Leipzig, Teubner, 1911, 125-131. Le savant professeur en prépare une édition, d'après les manuscrits de Vienne, de Dresde et de la Columbian University.

théorème d'Euclide. Elle se mettait donc naturellement chez eux sous les formes (1) :

$$x^2 + px = q, \qquad x^2 + q = px, \qquad px + q = x^2$$

Pour Stifel et son école, résoudre une équation, c'est extraire une racine ; le mot est resté. Résoudre une équation du 2d degré, c'est extraire une racine carrée. Stifel écrira donc :

$$x^2 = q - px, \qquad x^2 = px - q, \qquad x^2 = px + q$$

Au gré de Stevin, les deux procédés ont pour effet le plus clair d'effrayer les débutants, et de donner un aspect rébarbatif et compliqué à une opération facile et fort simple, d'un usage courant : la règle de trois. « Ce mot d'équation, dit-il, a faict penser aux apprentifs, que c'estoit quelque matière singulière, laquelle toutesfois est commune en la vulgaire arithmétique (2). »

Soit donc $x = a$ la racine. La vraie manière d'écrire l'équation est d'après lui :

$$\frac{x^2}{q - px} = \frac{x}{a} \qquad \frac{x^2}{px - q} = \frac{x}{a} \qquad \frac{x^2}{px + q} = \frac{x}{a}$$

Viète critique, avec raison, cette méthode (3). Elle n'est en effet

---

(1) Pour la brièveté et la clarté, j'énonce ces théorèmes sous une forme algébrique littérale, qui, cela va de soi, ne se trouve pas dans les ouvrages originaux.

(2) Éd. 1585, p. 264. Éd. 1625, p. 246. Éd. 1634, p. 61.

Il est intéressant d'entendre Stevin exposer ses idées sur ce sujet *(l. c.)* :

« La raison pourquoi nous appellons reigle de trois, ou invention de quatriesme proportionel des quantitez, ce que vulgairement se dict équation des quantitez.

» Veu que les noms convenables, sont en les sciences de grande importance, et principalement ès difficiles, ce n'est point à tort que nous les choisissons au lieu des inconvenables ; ce qui sera ici, de l'invention de quatriesme proportionel des quantitez, qui se dict vulgairement équation. Nous le nommons ainsi, parce qu'il est plus commode à la doctrine. Car puisqu'il y a tousiours donnez trois termes, ausquels on cherche un quatriesme proportionel, comme apparoistra en son lieu, pourquoi ne s'appelleroit ceci pas aussi bien invention de quatriesme proportionel, comme en tous autres ? »

(3) *Ad Problema Quod omnibus Mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianvs Romanvs Francisci Vietæ Responsum.* Parisiis, Apud Iametivm Mettayer Typographum Regium. 1595. Notamment, cap. 2, f° 2.

Viète n'y nomme pas Stevin, mais s'attaque directement à la manière dont correcte qu'à condition de supposer tacitement le numérateur égal au dénominateur, et de lire les proportions comme suit : x^2 vaut $q - px$; que vaut x ? C'est bien là d'ailleurs ce que fait systématiquement Stevin ; mais son algorithme ne l'indique pas suffisamment. Chaque équation y renferme deux inconnues et, comme le remarque l'algébriste français, tel qu'il est écrit, le problème est indéterminé.

Ces observations faites, voici le

Problème LXVIII (1).

« Estant donnez trois termes, desquels le premier (2), le second (1) (0), le troisiesme nombre algebraique quelconque, trouver leur quatriesme terme proportionel. »

Les caractères typographiques, dont dispose l'imprimeur, m'obligent à placer entre parenthèses des chiffres que Stevin écrit dans de petits cercles et qui représentent les exposants de l'inconnue. Dans sa notation

$$(3)\,(2)\,(1)\,(0)$$

signifie

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x^1 + a_3x^0$$

et par conséquent son énoncé pourrait se traduire comme suit : x^2 vaut $a_0x^1 + a_1x^0$; que vaut x ?

« *Nota.* Le binomie du second terme donné de ce problème, se peut rencontrer en trois différences (c'est-à-dire sous trois formes) à sçavoir :

$$\begin{array}{rl} (1) + (0) & [\quad px + qx^0] \\ -(1) + (0) & [-px + qx^0] \\ (1) - (0) & [\quad px - qx^0] \end{array}$$

» Desquelles les autres (auteurs) en donnent trois diverses opérations. » Stevin cite ici Stifel et Cardan. « Mais nous démonstrerons

Romain avait écrit son équation du 45e degré. Elle était analogue à celle de Stevin et avait identiquement les mêmes défauts.

(1) Éd. 1585, p. 285. Éd. 1625, p. 265. Éd. 1634, p. 66.

une seule manière, par laquelle sans varier d'une syllabe, l'opération sera en toutes trois la mesme. »

Stevin fait faire ici à la théorie un progrès notable. Stifel (1) et son école avaient bien remarqué, avant lui, la similitude des trois opérations et s'étaient même essayés à en formuler la solution en une règle unique (2). Leur effort avait été illusoire ; car la règle continuait à comprendre trois cas distincts. Voici, pour en juger, l'énoncé de Jacques Pelletier (3). Je le choisis parce qu'il est en français, et, en même temps, l'un des meilleurs :

« Premièrement : prenez la moitié du nombre des racines et la mettez à part, avec son signe de p(lus) ou de m(oins).

» Secondement : quarrez ceste moitié et adjoustez le quarré au nombre absolu (c'est-à-dire au terme tout connu), si le nombre absolu est signé de p(lus), ou l'en ostez, s'il est signé de m(oins).

» Tiercement : tirez la racine du provenant de l'addition ou soustraction, et adjoustez ceste racine à la moitié mise à part, si son signe est p(lus), et l'en ostez, si son signe est m(oins). Ce qui proviendra sera la racine de vostre nombre. »

Chez Stevin, on va le voir, plus rien de semblable.

« Première différence de second terme : (1) + (0), » ou *Premier cas* (4). « *Explication du donné* : Soient donnez trois termes selon le problème tels : le premier 1(2), le second 4(1) + 12, le troisiesme 1(1). *Explication du requis* : Il faut trouver leur quatriesme terme proportionel. »

Autrement : x^2 vaut $4x + 12$; que vaut x ?

« *Construction*. La moitié de 4, des 4(1), est	2
» Son quarré	4
» Au mesme ajousté le (0) donné (c.-à-d. le terme tout connu) qui est	12
» Donne somme	16

(1) *Arithmetica Integra, Authore Michaele Stifelio. Cum Praefatione Philippi Melanchthonis.* Norimbergae apud Ioan. Petreium. Anno M.D.XLIIII, f° 240, r°.

(2) Stifel. *Arith. Integ.*, f° 240 r°.

(3) *L'Algebre de Iaques Peletier du Mans, departie en deus Livres...* A Lion Par Ian de Tournes. M.D.LIIII, p. 34.

(4) Éd. 1585, p. 286. Éd. 1625, p. 266. Éd. 1634, p. 66.

» Sa racine quarrée 4
» A la mesme ajousté 2 premier en l'ordre faict 6
» Je di que 6 est le quatriesme terme proportionel requis. »

Suit une vérification arithmétique de la valeur trouvée de la racine, et la démonstration géométrique classique de la formule.

« Deuxiesme différence de second terme : — (1) + (0), » ou *Deuxième cas* (1). « *Explication du donné :* Soient donnez trois termes selon le problème tels : le premier 1(2), le second —6(1) + 16, le troisiesme 1(1). *Explication du requis :* Il faut trouver leur quatriesme terme proportionel. »

Autrement : x^2 vaut $-6x + 16$; que vaut x ?

« *Construction.* La moitié de —6, des —6(1), est —3
» Son quarré, car —3 par —3 faict + 9, est 9
» Au mesme ajousté le (0) donné, qui est 16
» Donne somme 25
» Sa racine quarrée 5
» A la mesme ajousté —3, premier en l'ordre, faict 2
» Je di que 2 est le quatriesme terme proportionel requis. »

Stevin a rigoureusement tenu sa promesse. Il a répété la règle *sans y changer une syllabe.* On voit par quel artifice de rédaction : tout consiste à dire, « ajouter —3 », au lieu de « retrancher 3 ». Nous nous servons perpétuellement de ce langage conventionnel. Ce n'est pas un des moindres mérites de Stevin, que d'en avoir eu l'idée le premier.

« Troisiesme différence de second terme : (1) — (0), » ou *Troisième cas* (2). « *Explication du donné :* Soient donnez trois termes selon le problème tels : le premier 1(2), le second 6(1) — 5, le troisiesme 1(1). *Explication du requis :* Il faut trouver leur quatriesme terme proportionel. » C'est-à-dire : x^2 vaut $6x - 5$; que vaut x ?

La *construction* est identique à celle des deux premières « différences » *sans y changer une syllabe* et en y employant de nouveau l'expression, *ajouter* — 5. Je l'omets.

Les trois « différences » eussent aussi conduit à une même formule, si l'on avait employé ce que Stevin nomme la « seconde

(1) Éd. 1585, p. 289. Éd. 1625, p. 269. Éd. 1634, p. 67.
(2) Éd. 1585, p. 293. Éd. 1625, p. 272. Éd. 1634, p. 68.

manière de construction » (1). Par « seconde manière de construction », il faut entendre la solution de l'équation

$$ax^2 = bx + c$$

par la formule

$$x = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}b^2 + ac} + \frac{1}{2}b}{a}$$

dans laquelle le coefficient de x^2 n'a pas préalablement été réduit à l'unité.

Stevin vérifie chaque fois la solution trouvée, puis il démontre, par une construction géométrique, la légitimité de la formule employée. A cette occasion, il devient on ne peut plus intéressant, car il se trouve devant deux grosses difficultés : la démonstration géométrique des trois « différences » n'est pas la même pour chacune d'elles et ne met pas en évidence la raison de l'unité de la règle ; ensuite les deux premières « différences » semblent n'avoir qu'une solution, tandis que la troisième en a deux.

Stevin résout la première difficulté d'une manière absolument originale et neuve. Au lieu d'une démonstration géométrique de la formule, dit-il en résumé, donnez en une démonstration algébrique, vous verrez bien que vous opérez d'après la même règle, dans les trois cas.

Il importe ici de lui passer la plume, car on pourrait croire que je substitue mes idées aux siennes. Je rappelle, pour l'intelligence du passage, que d'après lui, l'équation du second degré a été résolue, pour la première fois, par Mahomet el Chowârezmi.

« *De l'origine de la construction du précédent LXVIII problème* (2).

» Nous avons amplement faict aux constructions précédentes leurs démonstrations tant géométriques, qu'arithmétiques (par ces dernières Stevin veut dire qu'il a vérifié chaque fois la solution). Mais encore n'est pas notoire, par icelles, l'occasion qui a faict inventer à Mahomet telle reigle. Afin doncques que la chose soit

(1) Éd. 1585, pp. 288 et 291. Éd, 1625, pp. 268 et 271. Éd. 1634, p. 67.
(2) Éd. 1585, p. 298. Éd. 1625, p. 277. Éd. 1634, p. 69.

entendue parfaictement, nous la déclarerons par ses causes comme s'ensuit.

» Quand

(2) est égale à (1) (0) $[ax^2 = bx + cx^0]$

nous la pouvons réduire en

(1) égale à (0) $[b_1x = c_1x^0]$

et alors est la valeur de 1(1) $[= x]$ notoire par le précédent 67 problème (qui donne la résolution de l'équation du premier degré à une inconnue) ; et de telle réduction est colligée la manière de la dicte construction, comme apparoistra. Soit, par exemple :

1(2) égale à —6(1) + 16 $[x^2 = -6x + 16]$

qui sont le premier et second terme de la première construction de la seconde différence [1]. Et ajoustons à chaque partie 6(1) $[= 6x]$; et seront

1(2) + 6(1) égales à 16 $[x^2 + 6x = 16]$

» Reste maintenant de trouver quelque (0) $[= cx^0]$, qui ajousté à 1(2) + 6(1), $[= x^2 + 6x]$, que tel trinomie aie racine qui soit 1(1) + quelque (0) $[x + kx^0]$. Or pour trouver tel nombre, il ne faut que multiplier la moitié de 6, des 6(1) $[= 6x]$, qui est 3, en soi, faict 9 ; et on l'aura.

» La raison pourquoi le quarré de la moitié du nombre de (1), (c.-à-d. du coefficient de x), est tousiours le (0) (c.-à-d. le nombre tout connu), qu'il faut ajouster à tel binomie, est par cela manifeste, que le produict du nombre de (2) (c.-à-d. du coefficient de x^2), qui est ici unité, multiplié par le (0), (le terme tout connu), est tousiours égal au quarré de la moitié du nombre de (1) (c.-à-d. du coefficient de x).

» Et qui encore veut sçavoir pourquoi tel produict est tousiours égal au quarré, de la moitié du nombre de (1) ; qu'il multiplie 1(1) + quelque (0), en soi, [c.-à-d. qu'il développe $(x + kx^0)^2$], et

(1) Le premier exemple du deuxième cas. Nous l'avons donné ci-dessus.

facilement verra la cause ès nombres procédans de l'opération de telle multiplication.

» Ajoustons doncques 9, à chascune des égales parties et seront

1(2) + 6(1) + 9 égales à 25 $[x^2 + 6x + 9 = 25]$

» Puis extrahons de chasque partie racine quarrée, et seront

1(1) + 3 égales à 5 $[x + 3 = 5]$

» Puis soubstrahons de chascune partie 3, et sera

1(1) égale, ou vaudra pour solution, 2 $[x = 2]$

» Et par ceste manière, nous pourrions solver tous semblables exemples. Mais afin que telle invention de 1(1) $[= x]$ soit plus commode, on l'a rédigé en ordre, et on en a faict une reigle. »

Vient ensuite la difficulté de la double racine. Dans le cas des racines réelles, Stevin la résout complètement ; mais il n'a cure des racines imaginaires.

Supposons d'abord les deux racines réelles et positives ; c'est la troisième « différence ».

» Nous avons dict qu'en l'origine (c.-à-d. par la manière d'établir la formule) appert pourquoi la troisiesme différence a deux solutions [1] ; nous la déclairerons. Soit

1(2) égale à 6(1) — 5 $[x^2 = 6x - 5]$

qui sont le premier et le second terme de l'exemple de la troisiesme différence ; et soubstrahons de chascune partie 6(1) $[= 6x]$; et sera

1(2) — 6(1) égale à —5 $[x^2 - 6x = -5]$

» Reste maintenant de trouver quelque (0) $[= cx^0]$, qui ajousté à 1(2) — 6(1) $[= x^2 - 6x]$, le trinomie aie racine qui soit 1(1) et quelque (0) $[= x + kx^0]$. Le mesme pour les raisons que dessus sera 9, à sçavoir, le quarré de —3, moitié de —6, des —6(1) $[= -6x]$. Ajoutons doncques à chascune partie 9, et seront

1(2) — 6(1) + 9 égales à 4 $[x^2 - 6x + 9 = 4]$

(1) Éd. 1585, p. 300. Éd. 1625, p. 280. Éd. 1634, p. 69.

» Puis extrahons de chascune partie racine quarrée, et sera

1(1) — 3 égale à 2 $[x-3=2]$

ou autrement

—1(1) + 3 égale à 2 $[-x+3=2]$

» Car autant 1(1) — 3 $[=x-3]$, comme —1(1) + 3 $[=-x+3]$ est racine de 1(2) — 6(1) + 9 $[=x^2-6x+9]$. Quand doncques nous posons pour racine

1(1) — 3 égale à 2 $[x-3=2]$

il faut ajouster à chascune partie 3 et

1(1) sera égale ou vaudra 5 $[x=5]$

» Mais si nous posons pour racine

—1(1) + 3 égale à 2 $[-x+3=2]$

il faudra soubstraire de chasque partie 2, et restera

—1(1) + 1 égale à 0 $[-x+1=0]$

et ajoustant à chascune partie 1(1) $[=x]$, alors sera

1(1) égale ou vallant 1 $[x=1]$

» Et est la cause de la double solution, à ladicte troisiesme différence, par ces choses, si manifeste, qu'il n'est mestier d'en sonner plus mot. »

Quant aux racines négatives des équations, Stevin émet à leur sujet une idée qui devait faire son chemin ; elles sont, d'après lui, racines positives de l'équation, quand on y change x, en $-x$. Par conséquent, elles donnent alors « les vraies solutions des problèmes par +. »

Cette considération est tellement neuve, chez un algébriste du XVIe siècle, qu'il est nécessaire de mettre de nouveau sous les yeux du lecteur le texte même de Stevin.

« *Des solutions que l'on peut faire par — sur les précédens problèmes* (1).

(1) Éd. 1585, p. 332. Éd. 1625, p. 309. Éd. 1634, p. 77.

» Aucuns (c'est-à-dire quelques uns) des précédens problèmes, de la proportion des nombres algebraiques (= des équations), reçoivent par dessus les solutions ci-devant données, encore d'autre solution par —. Et combien les mesmes ne semblent que solutions songées, toutesfois elles sont utiles, pour venir par les mesmes aux vraies solutions des problèmes suivans par +. »

La réflexion de Stevin porte sur les équations de tous les degrés. Pour préciser son idée il y ajoute quelques « articles » ou exemples. Voici ceux qui ont trait à l'équation du 2d degré :

« *Article II* (1). Estant

(2) égale à (1) + (0) $[x^2=px+q]$

la solution ce peut faire par —.

» Par exemple :

1(2) vaut 4(1) + 21 $[x^2=4x+21]$

combien 1(1) $[=x]$?

» On changera le second terme donné ainsi :

1(2) vaut — 4(1) + 21 $[x^2=-4x+21]$

combien 1(1) ?

» Faict, par le 68 problème, 3 ; lequel appliqué à nostre question, nous dirons que la solution est — 3.

» *Article III*. Estant

(2) égale à — (1) + 0 $[x^2=-px+q]$

la solution se peut faire par —.

» Par exemple

1(2) vaut — 4(1) + 21 $[x^2=-4x+21]$

combien 1(1) $[=x]$?

» On changera le second terme donné ainsi :

1(2) vaut 4(1) + 21 $[x^2=4x+21]$

combien 1(1) ?

(1) Éd. 1585, p. 333. Éd. 1625, p. 310. Éd. 1634, p. 77.

» Faict, par le 68 problème, 7 ; lequel appliqué à nostre question, nous dirons que la solution est — 7.

» *Article IIII*. Estant

(2) égale à (1) — (0) $[x^2 = px - q]$

la valeur de (1) $[= x]$ ne peut estre —.

» La raison est que la valeur du premier (1) terme seroit tousiours +, et du second terme tousiours — ; lesquels ne peuvent estre égaux. »

C'est évident ; sous cette forme l'équation n'a jamais de racine réelle négative.

Résumons cette première note.

Au point du vue du mode d'écriture et de la notation des équations, Stevin eut une idée plutôt malheureuse, qui n'eut aucun succès.

En revanche, dans la théorie de l'équation du 2d degré, il introduisit trois innovations remarquables, qui sont restées : l'unité de la formule de solution ; la démonstration algébrique de cette formule (2); une interprétation des racines négatives. Il est bien entendu qu'il ne faut pas lui attribuer la découverte même des racines négatives. Tous les algébristes de l'époque les connaissaient, mais elles étaient pour eux sans signification.

Il serait inexact aussi de dire que Stevin a résolu complètement l'équation du 2d degré, car, nous l'avons dit, il ne tient pas compte des racines imaginaires.

(1) Il y a ici une faute d'impression dans l'édition de 1585 (p. 333) et dans celle de 1625 (p. 310) ; on lit dans le texte « second » au lieu de « premier ». L'édition de 1634 est corrigée (p. 77).

(2) Il est superflu de rappeler ici les solutions algébriques de l'équation du second degré données par les Indiens. Pas un géomètre contemporain de Stevin n'eût pu soupçonner leur existence.

II. — A PROPOS D'UN DOUTE DE M. MAURICE CANTOR RELATIF A L'ÉDITION DES ŒUVRES MATHÉMATIQUES DE SIMON STEVIN DONNÉE PAR ALBERT GIRARD

« En abordant l'analyse des travaux mécaniques et géométriques de Stevin, dit M. Maurice Cantor (1), il nous faut commencer par signaler une difficulté. L'édition des ouvrages de Stevin la plus répandue est la traduction française d'Albert Girard. Préparée après la mort de Stevin, elle ne parut qu'en 1634, après le décès de Girard. Les éditions précédentes sont rares au point d'être devenues introuvables (2). Nous sommes donc dans l'impossibilité de décider si la réédition des *Œuvres* de Stevin par Girard contient d'autres remaniements que les additions précédées du nom de l'éditeur, qui se distinguent aisément du texte primitif. »

Le problème soulevé par M. Cantor mérite d'autant plus d'être résolu que l'édition d'Albert Girard porte le titre d'*Œuvres mathématiques de Simon Stevin augmentées par Albert Girard.*

M. Gravelaar l'a jadis observé avec raison (3), le doute de M. Cantor, insoluble peut-être en Allemagne, ne l'est pas le moins du monde en Hollande. Il n'est pas plus difficile à tirer au clair en Belgique.

Les *Œuvres mathématiques* de Stevin par Albert Girard sont loin, on le sait, d'être une réédition complète de tous les travaux de l'auteur. Girard omet des traités entiers (4) et fait volontiers des coupures dans ceux qu'il reproduit, en supprimant notamment les

(1) *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 2e éd., t. 2, Leipzig, Teubner, 1900, p. 573.

(2) Pour la bibliographie des œuvres de Stevin, voir : *Bibliotheca Belgica, par le bibliothécaire en chef et les conservateurs de la Bibliothèque de l'Université de Gand*, 1e sér., t. 23, Gand, Vyt, 1880-90, au mot Stevin et 2e série (en cours de publication) S. 398. Véritable chef-d'œuvre de précision et d'exactitude, beaucoup trop ignoré par les historiens des mathématiques.

(3) *Stevin's Problemata Geometrica door N. L. W. A. Gravelaar*, NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE, 2e sér., t. 5, p. 2 du tiré-à-part.

(4) Par exemple, tous les travaux sur la comptabilité, les travaux philosophiques ou politiques etc. Pour renseignements plus précis, voir la *Bibliotheca Belgica* citée ci-dessus.

renseignements historiques. Ces coupures entraînent à l'occasion de légers remaniements de phrase, cela va de soi ; mais la question n'est pas là. Girard a-t-il été plus loin ? Corrige-t-il parfois Stevin ? Le complète-t-il ? Le met-il au point des nouveaux progrès de la science, en négligeant de nous en avertir ?

Sans avoir collationné systématiquement dans ce but, page par page, le gros volume de l'édition de Girard avec le texte original, je crois pouvoir répondre sans hésiter : non. Il faut attribuer à Girard les passages, voire même les traités entiers précédés de son nom (1), mais absolument rien d'autre. Une très longue habitude des diverses éditions des travaux de Stevin ne me laisse aucun doute à cet égard.

Le but de cette note est de prouver mon assertion pour deux endroits intéressants de l'*Arithmétique*, qui font difficulté et pourraient sembler me contredire. La clarté de la discussion demande de ne pas perdre de vue quelques détails bibliographiques. Stevin a écrit son *Arithmétique* en français. Les *Œuvres* de 1634 ne reproduisent cependant pas l'édition originale de Leyde (Christophe Plantin, 1585), mais bien textuellement l'édition *reueuë, corrigée et augmentée de plusieurs traictez et annotations par Albert Girard Samielois mathématicien,* qui parut aussi à Leyde, chez les Elzevier, en 1625.

Le premier des deux endroits auxquels je fais allusion est la célèbre solution, par approximations successives, de l'équation du 3e degré (2)

$$x^3 = 300x + 33\,915\,024.$$

On la trouve dans l'*Arithmétique* de 1625 (3) et dans les *Œuvres* de 1634 (4), mais elle manque dans l'*Arithmétique* de 1585. Stevin ne l'a en effet publiée qu'en 1594. Elle fait l'objet d'une rarissime plaquette intitulée *Appendice algebraique* (5) sur laquelle j'ai

(1) Parmi les traités entiers, j'ai surtout en vue le 5e et le 6e livre de Diophante.
(2) Voir Cantor, *Vorlesungen*, 2e ed., t. 2, pp. 628 et 629.
(3) Pp. 351-355.
(4) T. 1, pp. 88 et 89.
(5) *Appendice Algebraiqve De Simon Stevin de Bruges, contenant regle generale de toutes Equations, 1594.* Sans nom de ville ni d'éditeur. L'*Appendice* fut imprimé à Leyde par François van Raphelengen. Voir *Bibl. Belgica*, citée ci-dessus, 2e ser., t. 23, f° S. 135.

déjà appelé l'attention à plusieurs reprises (1). Philippe Gilbert en découvrit, en 1859, un exemplaire à la bibliothèque de l'Université de Louvain et en fit l'objet d'une note à l'Académie de Belgique (2). Stevin réédita l'*Appendice,* en 1608, dans la traduction française de ses *Mémoires mathématiques* confiée aux soins de Jean Tuning (3). Lui-même le donna en même temps en flamand, dans les *Wisconstige gedachtenissen* (4) et Willebrord Snellius le traduisit en latin, pour les *Hypomnemata mathematica* (5).

Le second endroit est un problème de Diophante (6). La solution n'est plus cette fois de Stevin, mais n'est pas davantage de Girard ; on la doit à Maurice de Nassau. Stevin et Maurice de Nassau ! A bien des points de vue je ne connais guère de sujet plus intéressant dans l'histoire de la Science (7). L'illustre Brugeois se montre ingénieur incomparable au service du plus intelligent des maîtres. Mais le patriote et l'homme de caractère y ont-ils toujours gagné ? Je crains qu'il vaille mieux ne pas l'approfondir.

L'édition originale des *Wisconstige gedachtenissen* fournit, sur les circonstances qui entourèrent la solution du problème actuel, des renseignements curieux (8), supprimés par Albert Girard ; je les cite d'après la traduction française de Tuning, faite, nous venons de le dire, d'après les ordres et sous le contrôle de Stevin (9).

(1) Principalement dans mon mémoire : *Le fragment du Commentaire d'Adrien Romain sur l'Algèbre de Mohammed ben Musa el Chowarezmî.* ANN. DE LA SOC. SCIENT, t. 30, Bruxelles, 1906, 2e part., p. 275.
(2) *Note sur un opuscule peu connu de Simon Stevin de Bruges. Lettre à M. Quetelet.* BULL. DE L'ACAD. ROY. DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE, 2e sér., t. 8. Bruxelles, pp. 192-197. L'exemplaire de l'*Appendice*, que possède l'Université de Louvain, (coté : scienc. 587) fait partie d'un recueil factice relié aux armes d'Adrien Romain.
(3) Leyde, Jean Paedts Jacobs, 1608, t. 5, pp. 7-10.
(4) Leyde, Jean Bouwensz, 1608, t. 5. pp. 7-10.
(5) Lugduni Batavorum, Joannes Patius, 1608, t. 5, pp. 7-9.
(6) Livr. II, prob. 19. Ed. 1625, pp. 467-470; Ed. 1634, pp. 117 et 118. Voir aussi, Ed. 1585, p. 496.
(7) Voir : *Bijdragen tot de geschiedenis der wetenschappen en letteren in Nederland, door Johannes Pieter van Cappelle.* Amsterdam, Van der Hey, 1821, pp. 125-166 : Over de wiskundige verdiensten van prins Maurits.
(8) T. 5, pp. 4-7.
(9) T. 5, pp. 4-7.

« Comme Son Excellence, passé quelque temps, résolut de vouloir examiner et entendre l'Arithmétique qu'auparavant, en l'an 1585, j'avoy divulgué en langue françoise, et que suivant tel dessein, il n'examinoit pas seulement le tout plus curieusement que selon le vulgaire, mais y adjoustoit encores ses propres inventions, que j'amassoye et gardoye, il m'a semblé bon de les mettre en ce lieu. »

Pour l'intelligence des « inventions » de Son Excellence « amassées et gardées » par Stevin, un mot d'éclaircissement ne sera pas superflu.

La traduction de Diophante, par Stevin, est des plus libres. Le texte français s'écarte complètement du texte grec, dont le traducteur semble n'avoir pris aucun souci. C'est un Diophante en style français et notations algébriques de la fin du XVI[e] siècle. Stevin reste cependant fidèle à l'algébriste grec en deux points :

1° N'employer qu'un seul signe graphique pour désigner les inconnues ;

2° Dans les problèmes un peu compliqués, retenir au fur et à mesure, sous forme de règles, les solutions trouvées, comme nous retenons dans les problèmes d'intérêt, par exemple, la formule

$$r = \frac{ait}{100},$$

puis appliquer ces règles, sans démonstration nouvelle, aux problèmes suivants. Stevin donne à ces règles le nom de « théorèmes arithmétiques ».

D'après Maurice de Nassau, cette manière d'opérer est pleine de complications inutiles surchargeant à plaisir la mémoire. Écoutons Stevin nous raconter les critiques qu'il dut subir à ce sujet (1). Titre du chapitre :

« *Des questions algébraïques que Diophante a opéré par le moyen de théorèmes arithmétiques, lesquelles Son Excellence a expédié* (c.-à-d. a résolues) *sans se servir d'iceux théorèmes.*

» Après que Son Excellence avoit examiné en nostre susdite

(1) *Mémoires mathématiques*, t. 5, p. 5 ; *Wisconstige gedachtenissen*. t. 5, p. 5 ; *Hypomnemata Mathematica*, t. 5, p. 5.

Arithmétique les définitions, ensemble l'opération rationelle d'addition, substraction, multiplication et division des nombres algébraïques, et qu'il estoit parvenu aux livres de Diophante traduits en françois, dont les propositions estoyent appliquées au précédent (1) comme practique de l'algèbre, il n'a aux computations d'icelles voulu suivre les opérations par moy descrites, mais ses propres imaginations, voyant, à la fin après, la concordance de sa conclusion avec l'autre (c'est-à-dire, avec celle de Stevin).

» Mais parce que la position des nombres algébraïques, pour imiter le proposé (2), advient souvent si obscure, que leur propriété se déclare là par théorèmes arithmétiques, ceste manière d'opération n'a pleu à Son Excellence ; disant qu'on ne se sçauroit souvenir à sa volonté de tels théorèmes inusitez et imaginations si intricates, quand quelques questions s'offrent à compter ; de sorte qu'en ce lieu, et partout là où se rencontroit quelque arrest, il s'est servi d'une autre voye, usant de postposées quantitez, et venant par communes règles d'icelles au requis. »

La *postposée quantité* est un deuxième signe graphique pour désigner la deuxième inconnue (3) ; le *requis*, la solution ; la *commune règle*, la règle générale de résolution des équations à deux inconnues.

« Or afin de réciter ici un exemple entre plusieurs, il est advenu que nous sommes parvenus à la 19 question du 2 livre de Diophante (4). » La solution de Diophante est perdue et Xylander son premier éditeur (5) en imagina une autre « qui avoit de l'erreur »

(1) Stevin donne les livres de Diophante, comme application de son algèbre *qui précède*.

(2) Cette expression de Stevin est très imagée. Pour lui, résoudre par l'algèbre un problème proposé, c'est « imiter le proposé par position de nombres algébraïques ».

(3) Stevin représente l'inconnue par un chiffre placé dans un petit cercle ; je remplace, comme toujours, ce dernier par une double parenthèse. Ceci remarqué

x, x^2, x^3 ... etc. s'écrivent respectivement chez lui : (1), (2), (3) ;
y, y^2, y^3 ... (1) *sec.* (2) *sec.* (3) *sec.* ;
z, z^2, z^3 ... (1) *ter.* (2) *ter.* (3) *ter.*

(4) Dans les *Diophanti Alexandrini Opera omnia*, édités par Tannery. Leipzig, Teubner, 1893, t. 1, p. 111, ce problème est le 18[e].

(5) *Diophanti Alexandrini Rerum Arithmeticarum Libri Sex*... Basileae per Eusebivm Episcopivm et Nicolai Fr. haeredes M.D.LXXV, pp. 58-60.

pour parler comme Stevin. Le problème revient à partager le nombre 80 en trois parties A, B, C telles que

$$\left(\mathrm{B}+\frac{1}{5}\mathrm{A}+6\right)-\left(\frac{1}{6}\mathrm{B}+7\right)=\left(\mathrm{C}+\frac{1}{6}\mathrm{B}+7\right)-\left(\frac{1}{7}\mathrm{C}+8\right)$$

$$=\left(\mathrm{A}+\frac{1}{7}\mathrm{C}+8\right)-\left(\frac{1}{5}\mathrm{A}+6\right).$$

En ajoutant à ces deux équations

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=80,$$

tout consiste, on le voit, à résoudre un système de trois équations à trois inconnues. J'abrège les longues explications de Stevin, mais voici la marche de son raisonnement en notations modernes :

« *Première partie de l'opération.* »

Son Excellence a mis pour la première partie x

pour la seconde y

d'où la troisième est $-x-y+80$

Donc

$\left(\mathrm{B}+\frac{1}{5}\mathrm{A}+6\right)-\left(\frac{1}{6}\mathrm{B}+7\right)$ vaut $\frac{5}{6}y+\frac{1}{5}x-1$

$\left(\mathrm{C}+\frac{1}{6}\mathrm{B}+7\right)-\left(\frac{1}{7}\mathrm{C}+8\right)$ vaut $-\frac{6}{7}x-\frac{29}{42}y+\frac{473}{7}$

d'où

$$\frac{5}{6}y+\frac{1}{5}x-1=-\frac{6}{7}x-\frac{29}{42}y+\frac{473}{7}$$

et par conséquent

$$y=-\frac{111}{160}x+45$$

« *Deuxième partie de l'opération* ».

L'inconnue y étant exprimée en fonction de x, Son Excellence « a recommencé une nouvelle opération, entièrement de quantitez premièrement posées », c'est-à-dire avec une seule inconnue.

Représentons la valeur de A par x

B valant $-\frac{111}{160}x+45$

C ($=-x-y+80$) vaut $-\frac{49}{160}x+35$

D'où $\left(\mathrm{B}+\frac{1}{5}\mathrm{A}+6\right)-\left(\frac{1}{6}\mathrm{B}+7\right)$ $-\frac{121}{320}x+\frac{73}{2}$

$\left(\mathrm{C}+\frac{1}{6}\mathrm{B}+7\right)-\left(\frac{1}{7}\mathrm{C}+8\right)$ vaut de même $-\frac{121}{320}x+\frac{73}{2}$

et $\left(\mathrm{A}+\frac{1}{7}\mathrm{C}+8\right)-\left(\frac{1}{5}\mathrm{A}+6\right)$ $\frac{121}{160}x+7$

Donc

$$-\frac{121}{320}x+\frac{73}{2}=\frac{121}{160}x+7$$

$$x=\frac{9440}{363} \qquad y=\frac{9786}{363} \qquad \text{la } 3^{\text{e}} \text{ partie}=\frac{9814}{363}$$

Dans l'édition originale Stevin fait suivre la solution de deux *Notes* omises par Albert Girard, mais trop curieuses pour ne pas être transcrites ici. La première est une critique de la méthode de Maurice de Nassau. Fidèle à Cardan dont il s'inspire évidemment, Maurice n'employait jamais à la fois plus de deux inconnues et exprimait immédiatement, au besoin plusieurs fois de suite, la valeur des secondes inconnues en fonction de la première (1). C'est, d'après Stevin, le procédé le plus clair pour résoudre les problèmes ; mais ce n'est pas toujours le plus court et il vaut parfois mieux, au point de vue de la brièveté, employer simultanément trois ou quatre inconnues.

« *1 Note* (2).

» L'opération ci-dessus n'a eu qu'une fois position de postposées quantitez ; mais il est advenu en aucuns exemples, que leur valeur

(1) Voir, pour plus de détails sur la méthode de Cardan, mon mémoire : *L'algèbre de Jacques Peletier du Mans*, Revue des Quest. scient., t. 61, Bruxelles, 1907, pp. 151-157.

(2) *Mémoires math.*, t. 5, pp. 6 et 7 ; *Wisconstige gedacht.*, t. 5, pp. 6 et 7 ; *Hypomn. math.*, t. 5, pp. 6 et 7.

estant trouvé en premièrement posées ([1]), et en opère ([2]) selon le requis de la question, qu'il en suivoit la deuxiesme fois position de postposées quantitez; à quoy Son Excellence reprint autrefois *secondement* postposées ([3]), et que le semblable advenoit aussi jusques à la troisiesme fois. Car combien que cela se pourroit opérer par une voye plus briefve, en usant des quantitez tiercement et quartement posées ([4]), sans à chascune fois cercher la valeur des postposées en premièrement posées, toutefois icelle manière sembloit plus commode, pour estre moins chargé de profondes imaginations. »

Ce sont donc « de profondes imaginations » d'après Stevin que de résoudre des systèmes d'équations du premier degré à trois et quatre inconnues ! C'est l'occasion de remarquer, une fois de plus, combien les auteurs du XVI^e siècle regardaient ces opérations si simples comme difficiles !

Dans la seconde note Stevin fait des réflexions de genres divers ([5]).

« *2 Note.*

» Combien que computations opérées avec postposées quantitez, ne sont pas matière nouvelle, mais que par quelques autheurs s'en donnent des exemples ([6]), toutefois considéré qu'il ne me

([1]) « Leur valeur (des postposées quantitez) estant trouvé en premièrement posées », c'est-à-dire les secondes inconnues étant exprimées en fonction de la première.

([2]) Les *Wisconstige gedachtenissen* disent (t. 5, p. 6) : « En daer me voortghevroght », et quand on continue à opérer.

([3]) Pour comprendre ceci, il faut se rappeler que dans la méthode de Cardan suivie par Maurice, avant de passer à la 3^e inconnue, on exprime la 2^e en fonction de la première ; ce qui permet d'employer un seul et même signe graphique pour représenter la 2^e, la 3^e, la 4^e inconnue. (Voir mon mémoire sur *L'algèbre de Jacques Peletier*, cité ci-dessus). C'est ce que Stevin appelle « reprendre autrefois *secondement* postposées. »

([4]) C'est-à-dire d'un 3^e et d'un 4^e signe graphique, pour désigner la 3^e et la 4^e inconnue.

([5]) *Mémoires mathém.*, t. 5, p. 7 ; *Wisconstige gedacht*. t. 5, p. 7 ; *Hypomn. math.*, t. 5, p. 7.

([6]) Notamment Cardan, Stifel, Peletier et Gosselin. Voir pour plus de détails mes mémoires sur *L'Algèbre de Jacques Peletier*, (cité ci-dessus, pp. 151-165), et sur le *De Arte Magna de Guillaume Gosselin*, BIBLIOTHECA MATHEMATICA, 3^e série, t. 7, Leipzig, 1906-1907, pp. 62-66.

souvient d'en avoir veu un usage si général comme Son Excellence en a mis en œuvre, et cela sur un fondement si ferme, que la vraye solution de plusieurs difficiles questions provenoit souvent en la première opération sans errer, ce que par autre voye causeroit à maint arithméticien un long rompement de teste, j'estime que l'annotation de ce chapitre ([1]) pourroit causer facilité, à ceux qui sur l'opération par postposées quantitez prendront regard plus près qu'on n'a fait.

» Je confesse aussi, que si à la translation et explication des livres de Diophante, cela m'eut alors esté si bien cognu comme maintenant, que je n'eusse pas mis iceux théorèmes si difficiles à retenir par mémoire ; car il me souvient encore, qu'estant occupé en ladite translation, je tenoy en mon imagination telle cognoissance, comme a fait aussi Son Excellence, pour inparfaicte.

» Ceci est parlé de ceste matière selon mon opinion présente. Si quelqu'un sans mon sçeu en a escrit plus amplement, et qu'il n'est venu en mes mains, l'on m'en veuille excuser, comme n'estant point d'intention d'amoindrir à quelqu'un sa réputation.

» Encore diroy-je ici une chose, à sçavoir que Son Excellence ne sçavoit souvent parvenir à vraye solution, par opération de postposées quantitez, aux questions de Diophante de quarrez et costez requis ayant qualité donnée, et à nombre arithmétique commensurable ([2]). Mais veu qu'icelles questions ont des solutions en multitude infinie, elles semblent une espèce de peu d'estime. Néantmoins ceux ausquels elles plaisent, peuvent attenter ce qu'ils en pourront faire par les susdites postposées quantitez, sans le secours des théorèmes du troisiesme et du quatriesme livre ([3]). »

([1]) « L'annotation de ce chapitre », c'est-à-dire, la note, la théorie, qui fait l'objet de ce chapitre.

([2]) Le « quarré requis » et le « costé requis » sont l'inconnue respectivement au second et au premier degré. Stevin a en vue les problèmes d'analyse indéterminée du 2^d degré au sens de Diophante ; c'est-à-dire dans lesquels les valeurs des inconnues ne sont pas astreintes à être entières, mais simplement rationnelles.

([3]) J'ai dit ci-dessus ce qu'étaient ces théorèmes auxquels Stevin fait allusion.