Pedes fusci, testaceo varii ; posteriores testacei, fusco notati ; calcaribus ferrugineis, anterioribus tres, posterioribus duos primos tarsorum articulos superantibus.

Alæ hyalinæ, ad regionem stigmatis latæ, apice obtusæ vel subacutæ ; reticulatione densa, fusca, pallido striata ; pilis fuscis ; area apicali venulis ramosis, serie venularum gradatarum instructa.

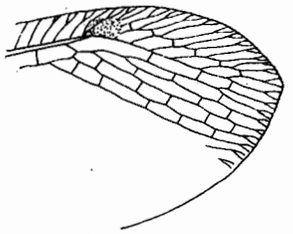

FIG. 11
Formicaleo latipennis Nav. Bout de l'aile antérieure (Mus. de Vienne).

Ala anterior (fig. 11) stigmate distinctissimo, extrorsum albo-flavo, introrsum macula orbiculari atra ; area radiali 8 venulis internis ; sectore radii 10 ramis.

Ala posterior angustior longiorque ; sectore radii 11 ramis ; stigmate albido, fere insensibili.

Long. corp.	26	mm.
— al. ant.	32	»
— — post.	33	»

Patrie. S. Celebes, Patuhuang, Jan. 1896, H. Fruhstorfer (Mus. de Vienne).

Ann. Soc. Scien (1913-14) Partie 2 Mémoires

Le Traité " De Centro Gravitatis „

de Jean-Charles della Faille, S. J.

PAR

H. BOSMANS, S. J.

Della Faille, excellent géomètre, est peu connu. Voilà bientôt 13 ans, j'ai essayé de raviver sa mémoire, en publiant dans les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE (1), une lettre de Grégoire de Saint-Vincent au P. Remi Happaert, écrite tout entière à l'éloge du jésuite anversois. Saint-Vincent y faisait, il est vrai, allusion à de nombreux écrits inédits de son élève ; mais la réputation scientifique dont jouit jadis della Faille fut tout entière bâtie sur une petite brochure de 55 pages, intitulée : *De Centro Gravitatis* (2).

(1) Bruxelles, 1901-1902 ; t. XXVI, 2e partie, pp. 22-40. *Deux lettres inédites de Grégoire de Saint-Vincent, publiées avec des notes bibliographiques sur les ouvrages de Grégoire de Saint-Vincent et les manuscrits de della Faille.*

Pour tout ce qui concerne la biographie de della Faille, je ne puis que renvoyer à l'excellente notice du P. Van der Speeten, S. J. *Le R. P. Jean Charles della Faille, de la Compagnie de Jésus, précepteur de don Juan d'Autriche...* Bruxelles, Vromant ; in-8° de 48 pages, sans date ; mais cette brochure est la réunion d'une série d'articles publiés, en 1874, dans la COLLECTION DE PRÉCIS HISTORIQUES, 2e série, t. 3.

(2) IOANNIS DELLA FAILLE ANTVERPIENSIS E SOCIETATE IESV In Academia Matritensi Collegij Imperialis Regij Matheseos Professoris THEOREMATA DE CENTRO GRAVITATIS PARTIVM CIRCVLI ET ELLIPSIS. (Magnifique marque d'imprimeur, signée : Petrus Paulus Rubens pinxit, Alex. Voet, sculp. Au centre d'un cartouche, une poule couvant des œufs ; devise : Noctu incubando diuque). ANTVERPIAE, EX OFFICINA TYPOGRAPHICA IOANNIS MEVRSI. ANNO M.DC.XXXII.

In-4° de (8) pages de préliminaires, 53 et (2) pages de texte, (1) page pour les approbations et le privilège. La Dédicace, écrite dans le style ampoulé de l'époque, est adressée à Philippe IV, roi d'Espagne.

A dessein, je dis : réputation scientifique ; car, della Faille se fit un nom comme précepteur de don Juan d'Autriche, fils légitimé de Philippe IV, roi d'Espagne. Or, chose assez bizarre, si les maîtres de la science, tels Grégoire de Saint-Vincent, Huygens, François Van Schooten, Guldin, parlent de della Faille comme d'un nouvel Archimède, les historiens des mathématiques sont en général beaucoup plus sobres d'éloges. Montucla (1) ne peut s'empêcher de traiter della Faille d'auteur « prolixe ». Quant à Quetelet (2), il est bien près de croire que le jésuite dut surtout la célébrité à sa charge de précepteur. En effet, après avoir accordé quelque mérite au traité *De Centro Gravitatis*, Quetelet dit qu'il « répond peut-être peu à l'opinion qu'on s'en était faite ». Plus loin, il ajoute : « Il nous a paru que les énoncés sont en général si spéciaux, qu'il est fort à douter qu'on puisse jamais en faire usage. »

Malgré l'autorité de Montucla et de Quetelet, je ne saurais me ranger à leur avis. Le *De Centro Gravitatis* de della Faille est au contraire d'une logique, d'un enchaînement, j'allais dire d'une sobriété remarquables ; mais, ici je dois m'expliquer. L'auteur a en vue un but bien précis, énoncé sous la forme de quatre corollaires, et imprimé en grands caractères à la fin du volume. A ce but, dès la première proposition, il marche tout droit, sans jamais dévier en route à droite ni à gauche ; sans jamais se laisser

(1) *Histoire des Mathématiques*... Nouvelle édition... Par J. F. Montucla, de l'Institut National de France. T. II. A Paris, chez Henri Agasse... An VII, p. 33. Voici le passage complet :

« Nous ne devons pas cependant dissimuler que la plupart de ces choses (les theorèmes donnés par Guldin) avaient été publiées par un auteur de la même compagnie, le P. La Faille, géomètre flamand, dans un écrit intitulé : *De Centro Gravitatis partium circuli et ellipsis theoremata*, in-4°, Lov. 1632. Là, ce géomètre digne d'éloges, assignoit, d'une manière à la vérité fort prolixe et embarrassée, les centres de gravité des différentes parties, tant du cercle que de l'ellipse. Il y faisoit avant tout voir la liaison qui existe entre cette détermination et celle de la quadrature de ces courbes, ou leur rectification, et comment l'une des deux étant donnée, l'autre l'est aussi nécessairement. »

Cette citation renferme une erreur au point de vue bibliographique ; il n'existe pas d'édition du traité *De Centro Gravitatis*, publiée à Louvain en 1632.

(2) *Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges*, par Ad. Quetelet, Bruxelles, Hayez, 1864, pp. 203-206.

distraire par la tentation de nous faire, à l'occasion, quelques réflexions intéressantes.

Le point culminant de l'ouvrage est la proposition 32 (1). En langage moderne, on pourrait l'énoncer comme suit :

« Si R, est le rayon, et A, l'angle d'un secteur circulaire ; le centre de gravité du secteur est situé sur la bissectrice, à une distance d du sommet de l'angle du secteur, donnée par

$$d = \frac{2}{3} \mathrm{R} \frac{\text{corde A}}{\text{A}}. \text{ »}$$

Les 31 premières propositions sont toutes nécessaires pour démontrer rigoureusement la formule ; les propositions qui suivent en sont des corollaires, ou du moins la supposent. Elles permettent de déterminer la position du centre de gravité d'un secteur, ou d'un segment circulaire, ou elliptique quelconque. Elles permettraient, en outre, de la construire, SI on savait construire la longueur de la circonférence ; pourvu, bien entendu, que le rapport de l'arc du segment ou du secteur à la circonférence soit donné. Réciproquement, elles permettraient de construire la longueur de la circonférence, SI on savait construire le centre de gravité d'un pareil secteur ou d'un pareil segment circulaire.

Montucla et Quetelet ont-ils suffisamment remarqué l'importance de ce SI conditionnel ? C'est cependant la nécessité d'en

(1) Le fait a déjà été signalé, notamment par Kaestner dans sa *Geschichte der Mathematik*, t. II, Göttingen, Johan Georg Rosenbusch, 1797, p. 213. Kaestner a donné (l. c., pp. 211-215), la meilleure analyse du traité *De Centro Gravitatis*, qui ait été faite jusqu'ici ; mais elle est néanmoins fort insuffisante pour le but que nous nous proposons ici.

Kaestner remarque avec beaucoup de raison que la formule équivalente à

$$d = \frac{2}{3} \mathrm{R} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \mathrm{A}}{\frac{1}{2} \mathrm{A}}$$

se trouve dans della Faille.

Cantor, dans ses VORLESUNGEN UEBER GESCHICHTE DER MATHEMATIK (2e éd. t. 2, Leipzig, Teubner, 1900, p. 696), ne consacre au *De Centro Gravitatis* de della Faille que quelques lignes, d'ailleurs exactes ; je me plais à le reconnaître.

tenir compte, qui peut donner à della Faille, pour un lecteur inattentif, l'impression d'un écrivain prolixe et alambiqué. Sous peine de commettre de grossiers paralogismes, le jésuite doit continuellement distinguer la simple existence d'une figure, et la possibilité de sa construction. Il existe une droite égale à une circonférence donnée ; on ne sait pas, pour cela, la construire. Pour établir sa formule fondamentale, della Faille doit supposer, qu'étant donné un secteur, il existe une droite égale à l'arc du secteur ; mais, dès la première proposition, il nous en avertit : il l'entend à la manière dont Archimède l'entend et l'a démontré dans le traité de la *Spirale*. Que les démonstrations s'allongent et s'alourdissent par cette distinction, c'est inévitable. Peut-on le reprocher à l'auteur ?

Les contemporains ne le crurent pas. Un traité purement logique, sans applications pratiques immédiates, comme celui de della Faille, n'a de valeur qu'à la condition de se recommander par une impeccable rigueur. C'est en effet, son grand mérite. Et voilà ce qui justifie la présence des 31 premières propositions. Aucune n'est superflue, toutes sont indispensables ; nous espérons le montrer et c'est le but principal de ce mémoire.

Voici, d'abord, quelques observations préliminaires. Admirateur passionné des géomètres grecs, l'auteur écrit dans leur style. Comme chez Euclide, on distingue dans les propositions de della Faille quatre parties : la *protase,* dans laquelle la proposition est énoncée ; l'*ecthèse,* dans laquelle on applique l'énoncé donné dans la protase à une figure tracée ; la *démonstration* ; la *conclusion* dans laquelle on répète la protase (1). J'en reviens au reproche de prolixité adressé à della Faille. Le fonde-t-on. peut-être, sur cette triple répétition systématique de la protase, de l'ecthèse et de la conclusion ? Dans ce cas, j'en demeure d'accord ; della Faille est prolixe. Mais, il l'est à la manière d'Euclide, ni plus ni moins.

Autre remarque. Pour comprendre la raison d'être des 31 premières propositions, il faut avoir présents à l'esprit, sinon toutes

(1) Pour plus de détails sur ce sujet, voir, par exemple : *Histoire des Mathématiques dans l'Antiquité et le Moyen Age*, par H. G. Zeuthen. Édition française revue et corrigée par l'auteur, traduite par Jean Mascart. Paris, Gauthier-Villars, 1902, pp. 80-84.

les démonstrations, du moins les énoncés des postulats et des théorèmes du *Liv. I De l'Équilibre des Plans,* par Archimède. Della Faille y renvoie à tout instant. Il m'a paru commode pour le lecteur, de rappeler ces énoncés en *Appendice,* à la fin de mon étude. Au cours du travail, les postulats se désigneront par la lettre P ; les théorèmes, par les chiffres romains I ou II, accompagnés d'un numéro d'ordre. Exemple : (P, 5), (I, 8) ; 5e postulat ; 8e théorème du premier livre de l'*Équilibre des plans,* par Archimède.

Aux énoncés du premier livre, il m'a paru superflu d'ajouter ceux du second. Ce dernier livre, on le sait, est consacré tout entier aux segments de paraboles. Si della Faille s'en inspire souvent, pour appliquer au cercle et à l'ellipse les démonstrations d'Archimède relatives à la parabole, jamais il ne fait directement allusion au second livre. Ce seraient, cette fois, les démonstrations elles-mêmes qu'il faudrait avoir sous les yeux ; une simple liste des propositions serait sans utilité ; au lecteur que la comparaison directe du géomètre grec avec le géomètre flamand intéresserait, je ne puis que signaler les éditions, d'ailleurs fort connues, des *Œuvres d'Archimède*, par Peyrard (1) ou par Heiberg (2).

Disons enfin qu'à l'exemple de Grégoire de Saint-Vincent, son illustre maître, della Faille est géomètre, mais pas du tout algébriste. Toujours il opère par transformation de proportions, jamais par résolution d'équations. On chercherait, en vain, dans tout le volume, un signe d'égalité ou d'opération algébrique quelconque ; pas même une barre de fraction. Je ne me suis pas assujetti à cette règle, ni à suivre pas à pas toutes les transformations de l'auteur, tout en tâchant cependant de faire comprendre le mieux possible le caractère propre de chaque

(1) *Œuvres d'Archimède*, traduites littéralement, avec un Commentaire, par F. Peyrard... A Paris, chez François Buisson... MDCCCVII.

(2) *Archimedis Opera omnia cum Commentariis Eutocii.* E codice Florentino recensuit, latine vertit, notisque illustravit, J. L. Heiberg ; Lipsiae, in Aedibus B. G. Teubneri. T. 2, MDCCCLXXXI.

Archimedis Opera omnia iterum edidit J. L. Heiberg. Professor Hauniensis. T. 2. In Aedibus Teubneri. MDCCCCXIII.

démonstration. Il était indispensable d'en avertir, une fois pour toutes, le lecteur. La conséquence naturelle du style de della Faille est la nécessité de multiplier les figures, sous peine de devenir inintelligible. Aussi ne s'en fait-il pas faute. Je n'en compte pas moins de 85 pour 45 propositions. Non seulement le lecteur a toujours la figure sous les yeux, sans tourner la page, mais, quand la démonstration se prolonge, les figures sont même répétées sur deux pages en regard. C'est fort commode, mais excessif. On comprendra que je n'ai pas songé à imiter della Faille. Je reproduis les figures de quelque complication, en priant le lecteur de bien vouloir dessiner les autres.

I

Della Faille débute par 14 propositions d'un caractère purement géométrique. J'en modernise quelque peu les énoncés, en combinant la protase et l'ecthèse ; l'admirable logique de l'auteur en apparaîtra d'autant mieux. Il m'a paru aussi inutile de m'astreindre aux lettres de l'original ; cette liberté, entre autres avantages, me procurera celui de pouvoir souvent faire usage d'une même figure, pour plusieurs théorèmes.

Prop. 1. Étant donné un secteur ABD, il existe, sur le rayon BD du secteur, un point C, qui détermine, avec le rayon AB, un triangle ABC, équivalent au secteur ABD.

En effet, d'après ce qu'Archimède a démontré dans le traité de la *Spirale*, il existe une droite égale à la longueur de l'arc AD du secteur. Que cette droite soit BI, et qu'on suppose BI élevée en B perpendiculairement au rayon AB du secteur, et du même côté que le rayon BD. Par l'extrémité I supposons IF parallèle à BA. Le point C où IF rencontre BD est le sommet du triangle demandé.

La démonstration donnée par della Faille revient à dire, que la hauteur du triangle étant égale à l'arc du secteur, le triangle et le secteur, qui ont d'ailleurs en commun le rayon AB, ont la même mesure.

Prop. 2. Le point C déterminé dans la proposition précédente, tombe nécessairement sur le prolongement de DB ; de plus, le

côté CA du triangle coupe nécessairement l'arc AD du secteur, en un second point E, distinct de A.

En effet, si C était sur le rayon BD lui-même, ou s'il tombait en D, le triangle ABC serait tout entier intérieur au secteur ABD et par conséquent ne saurait lui être égal, contrairement à l'hypothèse.

Pour démontrer la seconde partie, menons en A la tangente AF au secteur. Elle rencontrera en F le rayon BD prolongé. Le triangle BAF ainsi formé contient tout le secteur ABD et par conséquent est plus grand que lui. Il est donc aussi plus grand que le triangle ABC ; et par conséquent le sommet C doit tomber entre D et F ; donc le côté AC coupera l'arc AD en un point E, situé entre D et A.

On peut objecter à cette démonstration qu'elle ne vaut que lorsque l'angle du secteur est aigu. C'est exact, mais, sans inconvénient ; della Faille ne se sert de cette seconde partie du théorème que dans la proposition 8. Il y démontre que l'on peut prendre l'angle du secteur assez petit, pour que le prolongement DC du rayon tende vers zéro.

Quant à la 1ᵉ partie de la proposition, elle est fondamentale. Elle est invoquée notamment dans la démonstration de la proposition 32, vers laquelle, comme nous l'avons dit, converge tout l'ouvrage.

Le but immédiat des prop. 3-8 est la démonstration de la prop. 9 ; cette dernière sera invoquée dans la prop. 32.

Prop. 3. On donne, comme dans la prop. 2, le secteur ABD ; et le triangle ABC, qui lui est équivalent. Par le sommet B de l'angle du secteur, on mène, à l'intérieur de cet angle, une sécante quelconque, rencontrant, en E, l'arc AD du secteur ; et, en F, le côté AC du triangle. Je dis qu'on aura

$$\frac{AF}{FC} < \frac{\text{arc } AE}{\text{arc } ED}.$$

Le côté AC coupant l'arc AD (prop. 2), le point F peut tomber : soit sur la partie de AC, qui est intérieure au secteur ; soit au point d'intersection de AC et de l'arc BD ; soit sur la partie de AC qui est extérieure au secteur.

Or ; quelle que soit la position de F, sur AC, on a

$$\text{tr } ABF < \text{sect } ABE, \text{ et tr } FBC > \text{sect } EBD.$$

En effet, supposons, d'abord, que le point F tombe soit sur la partie du côté AC, qui est intérieure au secteur ; soit au point même d'intersection de AC avec l'arc AD. Dans ces deux cas, le secteur ABE contient le triangle ABF ; et la première inégalité est évidente. Quant à la seconde, elle s'obtient en soustrayant, membre à membre, la première inégalité, de

$$\text{tr ABC} = \text{sect ABD}.$$

Si, au contraire, le point F tombe sur la partie de AC, qui est extérieure au secteur, le triangle FBC contient le secteur EBD ; la seconde inégalité est évidente ; et c'est la première qui s'en déduit, par soustraction, membre à membre, de la même égalité.

De cette double inégalité, on tire :

$$\frac{\text{tr ABF}}{\text{tr FBC}} < \frac{\text{sect ABE}}{\text{sect EBD}}$$

Mais, on a évidemment

$$\frac{\text{tr ABF}}{\text{tr FBC}} = \frac{\text{AF}}{\text{FC}}; \quad \frac{\text{sect ABE}}{\text{sect EBD}} = \frac{\text{arc AE}}{\text{arc ED}}$$

D'où

$$\frac{\text{AF}}{\text{FC}} < \frac{\text{arc AE}}{\text{arc ED}}$$

Prop. 4. Soit (fig. 1) toujours donné le secteur ABD, et le triangle qui lui est équivalent, ABC. Prenons, sur le côté BA, un point E, tel que le triangle EBC soit semblable à ABC ; par le centre B de la circonférence, menons, à l'intérieur de l'angle du secteur, une sécante quelconque rencontrant, en F, le côté CE ; en G, l'arc AD. Je dis, qu'on aura

$$\frac{\text{EF}}{\text{FC}} > \frac{\text{arc AG}}{\text{arc GD}}$$

Soit H, le point d'intersection de la sécante avec AC.

Supposons, en premier lieu, que la sécante BF soit la bissectrice de l'angle ABC. On a (prop. 2)

$$\text{BC} > \text{BA d'où BE} > \text{BC}.$$

Or, la bissectrice divise la base en segments proportionnels aux côtés adjacents. Donc EF > FC ; et le théorème est démontré.

Supposons, en second lieu, que la sécante ne soit pas bissectrice. Construisons l'angle CBK = EBF. Soit I, le point où BK

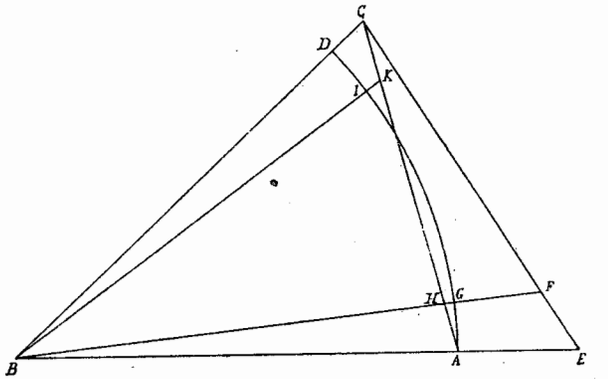

Fig. 1

coupe AD. Les triangles CBK et EBF ; KBA et FBC, sont semblables. Donc, tenant compte de la prop. 3 :

$$\frac{\text{EF}}{\text{FC}} = \frac{\text{CK}}{\text{KA}} > \frac{\text{arc DI}}{\text{arc IA}} = \frac{\text{arc AG}}{\text{arc GD}}$$

Une réflexion à propos du cas particulier de la bissectrice. La figure n'est pas la même que celle du cas général. A l'époque de della Faille, en vue de la rigueur, on se croyait obligé de traiter à part un pareil cas. Ceci admis, la démonstration choisie pour cela, par l'auteur, est plus simple que la démonstration générale ; il n'a pas hésité. Nos idées ont changé. Fût-elle moins simple, nous préférons appliquer, aux cas particuliers, la démonstration générale.

Prop. 5. (fig. 2) Étant donnés, le secteur, ABD ; le triangle équivalent, ABC ; et le triangle EBC, semblable à ABC : menons, par B, dans l'angle ABD, une sécante quelconque, rencontrant CE, en F ; CA, en K ; et l'arc DA, en I. Je dis que l'on peut mener, à

ıe droite CG rencontrant BF, en un
isée, dans le rapport

$$\frac{H}{HC} = \frac{\text{arc AI}}{\text{arc ID}}$$

de l'existence de cette ligne et non de

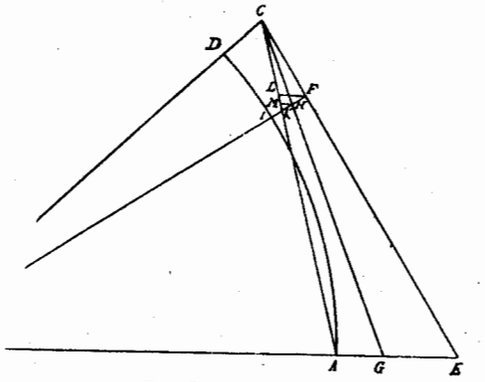

Fig. 2

par la règle et le compas. Sous la même réserve,
ste un point M qui divise AC dans le rapport

$$\frac{AM}{MC} = \frac{\text{arc AI}}{\text{arc ID}}$$

p. 4 et 5 donnent

$$\frac{AK}{KC} < \frac{\text{arc AI}}{\text{arc ID}} < \frac{EF}{FC}$$

ıous menons, par F, et par M, les parallèles FL, MH, à
int M tombera entre K et L ; le point H, entre K et F.
joignant C et H, la droite CHG répond à la question.
ɔposition se démontre, sans difficulté, par les proportions.
. 6. (fig. 3) Conservons les données et les notations de la
ıtion précédente. Joignons HA. Je dis que le triangle HAB
ıivalent au secteur ABI.

En effet, on a, en résumé

$$\frac{\text{sect ABI}}{\text{sect IBD}} = \frac{\text{arc AI}}{\text{arc ID}} = \frac{GH}{HC} = \frac{\text{tr GBH}}{\text{tr HBC}}$$

d'où, en appliquant la théorie des rapports égaux

$$\frac{\text{sect ABI}}{\text{sect ABD}} = \frac{\text{tr GBH}}{\text{tr GBC}}$$

Mais

$$\frac{\text{tr GBH}}{\text{tr GBC}} = \frac{\text{tr ABH}}{\text{tr ABC}}$$

d'où

$$\frac{\text{sect ABI}}{\text{sect ABD}} = \frac{\text{tr ABH}}{\text{tr ABC}}$$

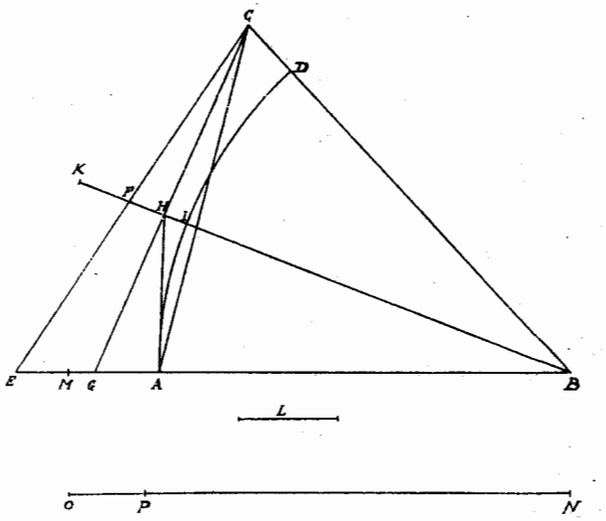

Fig. 3

Or, les dénominateurs étant égaux, par hypothèse, les numérateurs le sont aussi.

PROP. 7. (fig. 3) Conservons toujours les mêmes données et les mêmes notations. Prenons sur FB un point K tel que

$$\frac{KB}{CB} = \frac{CB}{HB}$$

je dis que l'on a $KB < EB$.

En effet, les triangles, ABC, EBC, étant semblables, par hypothèse, on a

$$\frac{EB}{CB} = \frac{CB}{AB}$$

Mais, d'après la prop. 2., $HB > AB$, donc $KB < EB$.

Avant de passer outre, il importe de remarquer le but de cette proposition. L'auteur affirmera tantôt, que la différence $EB - KB$ est une quantité qui tend vers zéro (prop. 9). Mais, son raisonnement, fondé sur des inégalités, ne vaut, que s'il est démontré que KB, tout en devenant supérieur à une quantité convenablement choisie, reste cependant inférieur à EB.

PROP. 8. On donne une circonférence de centre B, et un rayon AB, de cette circonférence. On demande, de construire, sur BA, un secteur ABD, tel, qu'après avoir pris, sur le rayon BD prolongé, le point C qui détermine

$$\text{Tr ABC} = \text{Sect ABD}$$

le prolongement CD du rayon soit inférieur à une longueur donnée l.

De B, comme centre, avec un rayon égal à la somme des longueurs $BA + l$, décrivons une circonférence concentrique à la proposée. Par l'extrémité A du rayon, menons à la proposée, la tangente AM. Soit N, le point où AM rencontre la circonférence extérieure. Joignons NB ; et soit D, le point où NB rencontre la proposée. Le secteur ABD répond à la question.

En effet (prop. 2), C tombe entre N et D. Donc

$$CD < ND = l$$

PROP. 9. (Fig. 3). Reprenons toutes les données, constructions et notations des prop. 6 et 7. Soit L une longueur arbitrairement

donnée. Je dis que l'on peut prendre le secteur ABI de manière que

$$EB - KB < L.$$

A cause de l'importance de la proposition, je passe par tous les intermédiaires de l'auteur.

Entre E et A, prenons un point M, tel que

$$EB - MB < L.$$

Construisons NO, par la proportion

$$\frac{NO}{CB} = \frac{CB}{MB} \qquad (1)$$

Mais, les triangles ABC, EBC, étant semblables, par hypothèse

$$\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{EB}$$

donc

$$EB \times AB = CB^2 = NO \times MB$$

d'où

$$\frac{EB}{MB} = \frac{NO}{AB}$$

Or,

$$EB > MB,$$

par construction ; donc

$$NO > AB.$$

Ceci posé, en vue d'appliquer la prop. 8, choisissons une longueur l, donnée par

$$l = ON - AB = ON - PN = OP.$$

Effectuons, ensuite, la construction de la prop. 8 ; et soit ABI le secteur ainsi obtenu.

On sait (prop. 5) qu'il existe, dans l'angle ACE, une droite CG, rencontrant BI, en un point H, tel que

$$\frac{GH}{HC} = \frac{\text{arc AI}}{\text{arc ID}}$$

On sait, en outre (prop. 6), que si l'on joint H, A, on a

$$\text{Sect ABI} = \text{Tr ABH}.$$

Or, le secteur ayant été construit par la prop. 8

$$\text{HI} < l;$$

ou

$$\text{HB} - \text{IB} < \text{ON} - \text{AB};$$

ou enfin

$$\text{HB} < \text{ON}.$$

Construisons KB, comme le suppose l'énoncé par la proportion

$$\frac{\text{HB}}{\text{CB}} = \frac{\text{CB}}{\text{KB}} \qquad (2)$$

On déduit de (1) et (2)

$$\text{HB} \times \text{KB} = \text{ON} \times \text{MB},$$

d'où

$$\frac{\text{HB}}{\text{ON}} = \frac{\text{MB}}{\text{KB}}$$

Mais, on vient de démontrer

$$\text{HB} < \text{ON};$$

donc

$$\text{MB} < \text{KB}.$$

Mais on a aussi (prop. 7)

$$\text{KB} < \text{EB}$$

donc

$$\text{MB} < \text{KB} < \text{EB}.$$

Or, on a pris

$$\text{EB} - \text{MB} < \text{L}.$$

Donc, enfin

$$\text{EB} - \text{KB} < \text{L},$$

ce qui démontre le théorème.

Jetons un regard en arrière sur les neuf premières propositions. Une seule, la huitième, demande à pouvoir être exécutée par la règle et le compas; mais elle n'offre aucune difficulté. Supposons cette construction effectuée; les neuf premières propositions s'enchaînent dans l'ordre le plus naturel, pour montrer qu'il en résulte l'existence d'une quantité qui tend vers zéro. Il importe peu, on le verra, dans le raisonnement de la prop. 32, qu'on ne sache pas construire cette quantité; tout le raisonnement tiendra debout, pourvu qu'elle existe. Quand nous développerons ce raisonnement, on admirera mieux que maintenant, quelle ingéniosité a déployée della Faille, pour imaginer les combinaisons géométriques, par lesquelles il obtient sa quantité qui tend vers zéro. « Acutissimus della Faille » dit Huygens [1]. Le compliment est mérité.

II

Les cinq propositions suivantes, diffèrent fort de celles qui précèdent. En les plaçant ici, della Faille a évidemment eu pour but de réunir, en tête du volume, toutes les propositions de géométrie pure.

L'intéressante proposition 10 est donnée en vue de la proposition 28. Dans cette dernière, della Faille démontrera, que si, dans un secteur circulaire, on inscrit un secteur polygonal régulier de 2^n côtés, le centre de gravité du secteur polygonal ne saurait pas être à une distance du centre égale aux 2/3 de l'apothème.

Prop. 10 (fig. 4). Étant données trois droites, AB, AC, AD, issues d'un même point A; et telles que la droite intérieure AD forme avec les deux autres les angles inégaux

$$\text{DAB} < \text{DAC}$$

Si on les coupe, par une sécante BDC, dans le rapport

$$\frac{\text{BD}}{\text{DC}} = \frac{\text{ang BAD}}{\text{ang DAC}}$$

---

[1] *Christiani Hugenii Theoremata de Quadratura Hyperboles, Ellipsis et Circuli, ex dato portionum gravitatis centro...* Lugduni Batavorum, Ex Officina Elseviriana. M. DC. LI. dans la préface au lecteur. Réédité dans *Œuvres complètes de Christiaan Huygens*, t. XI, La Haye, Martinus Nijhoff, 1908, p. 285.

je dis que l'on aura

$$AD < AC < AB.$$

La démonstration se fait par l'absurde.

De A, comme centre, avec AD, pour rayon, décrivons l'arc de cercle FDE, rencontrant AB, en F ; et AC, en E. Abaissons les perpendiculaires, DH, sur AB ; DG, BI, FL, sur AC ; et BK, sur AD.

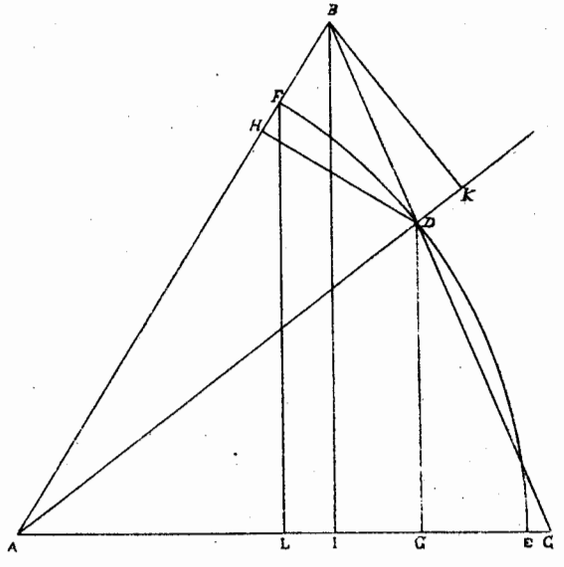

FIG. 4

Je dis, d'abord, que l'on a $AD < AC$.

Que cela ne soit pas. On aurait alors, $AD = AC$, ou $AD > AC$.

Supposons, d'abord, $AD = AC$. Il est intéressant de passer, de nouveau, dans cette partie de la démonstration, par tous les intermédiaires de l'auteur. A cause de l'hypothèse faite, le triangle ACD est isoscèle ; donc, l'angle ADC est aigu, ainsi que l'angle BDK, qui lui est opposé par le sommet. Donc, le pied K de la perpendiculaire BK, tombe sur le prolongement de AD.

Pourquoi cette conclusion, dont l'auteur semble ne plus se

servir ? Elle doit uniquement prévenir une objection que n'eussent pas manqué de lui faire les géomètres du temps : c'est qu'il oublie d'examiner le cas particulier où BK se confondrait avec BD. Della Faille commence par leur prouver qu'il n'a pas à s'en occuper.

Cette remarque faite, il continue : Comme, par hypothèse, $AD = AC$, les triangles BAD, BAC, ont des bases égales ; ils sont donc entre eux, comme les hauteurs qui leur sont opposées ; par conséquent

$$\frac{\text{tr BAC}}{\text{tr BAD}} = \frac{BI}{BK}$$

Mais, ces mêmes triangles donnent aussi

$$\frac{\text{tr BAC}}{\text{tr BAD}} = \frac{BC}{BD}$$

d'où

$$\frac{BI}{BK} = \frac{BC}{BD} = \frac{\text{ang BAC}}{\text{ang BAD}} = \frac{\text{arc FE}}{\text{arc FD}} \qquad (1)$$

D'autre part, les triangles ABI, AFL, évidemment semblables, donnent

$$\frac{BI}{FL} = \frac{AB}{AF}$$

de même, les triangles équiangles ADH, ABK donnent :

$$\frac{AB}{AD \text{ ou } AF} = \frac{BK}{DH}$$

d'où

$$\frac{BI}{FL} = \frac{BK}{DH}$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{BI}{BK} = \frac{FL}{DH} \qquad (2)$$

comparant (1) et (2), on aurait, enfin

$$\frac{FL}{DH} = \frac{\text{arc FE}}{\text{arc FD}}$$

ce qui est absurde.

Pour justifier cette conclusion parfaitement vraie, quoique un peu inattendue, della Faille renvoie, en marge, à la proposition 10 du traité *De Sinibus* de Clavius. Puis, il ajoute : « Nous ne faisons qu'appliquer aux demi arcs et aux demi-cordes, ce que Clavius a démontré pour les arcs et les cordes entières. » (1)

Au passage indiqué, Clavius énonce le théorème suivant :

« Si deux arcs sont tels, que le plus grand arc soustende la plus grande corde, le rapport du plus grand arc au plus petit est supérieur au rapport de la plus grande corde à la plus petite. »

Plus loin, à la page suivante, dans le scolie de la même proposition, Clavius remarque que la restriction formulée dans l'énoncé du théorème est inutile ; car, la proposition est vraie pour deux arcs quelconques. Comme Clavius ne connaît, ni les arcs négatifs, ni les arcs supérieurs à une circonférence, la proposition invoquée par della Faille, revient à celle-ci :

Si α et β sont deux arcs compris entre 0° et 180°, et si $\alpha > \beta$, on a

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Bien entendu, si dans tout ceci j'ai nommé Clavius, c'est pour raisonner avec della Faille. Mais, della Faille est élève de Grégoire de Saint-Vincent, qui lui même eut pour maître Clavius. Or, ni Saint-Vincent, ni son élève, n'ont la tournure d'esprit d'un historien des mathématiques. Exclusivement géomètres, ils agissent comme beaucoup de géomètres d'aujourd'hui, qui, lorsqu'ils invoquent une proposition supposée connue, se contentent de renvoyer à un traité où, à leur avis, elle est bien démontrée. La proposition s'y rencontre-t-elle pour la première fois ? Ils n'en ont cure.

Della Faille cite Clavius, parce que suivant toutes les apparences, Grégoire de Saint-Vincent lui a mis, à Anvers, Clavius entre les mains et que c'est dans Clavius qu'il a appris à connaître le théorème. S'il avait eu souci de faire œuvre d'historien, au lieu de

(1) *Christophori Clavii Bambergensis Societatis Jesu Opera Mathematica*, t. I, Moguntiae, sumptibus Antonii Hierat, MDCXII, p. 90.

Clavius, il eut dû invoquer Ptolémée, qui donne, au premier livre de l'*Almageste*, une formule équivalant à

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \quad (\alpha > \beta)$$

en vue de la construction de sa table des cordes (2). La démonstration de Ptolémée est élégante et ingénieuse. Delambre l'expose en notations modernes dans son *Histoire de l'Astronomie ancienne* (1). Je ne m'y arrête pas.

Supposons maintenant AD > AC. L'angle ADC « ne saurait être droit », dit cette fois della Faille ; car, il est opposé au côté AC < AD. Nous avons expliqué, ci-dessus, la portée de cette remarque.

Ceci posé, puisque dans les triangles BAC, BAD, on suppose AC < AD, le rapport des aires de ces deux triangles est inférieur à celui des hauteurs abaissées sur ces bases ; donc

$$\frac{\text{tr BAC}}{\text{tr BAD}} < \frac{\text{BI}}{\text{BK}}$$

d'autre part

$$\frac{\text{tr BAC}}{\text{tr BAD}} = \frac{\text{BC}}{\text{BD}}$$

donc

$$\frac{\text{BC}}{\text{BD}} < \frac{\text{BI}}{\text{BK}}.$$

Or, par hypothèse,

$$\frac{\text{BC}}{\text{BD}} = \frac{\text{arc FE}}{\text{arc FD}}$$

et nous avons démontré, ci-dessus (2)

$$\frac{\text{BI}}{\text{BK}} = \frac{\text{FL}}{\text{DH}}$$

(1) *Claudii Ptolemaei, Syntexis Mathematica*, edidit J. L. Heiberg. Lipsiae, in Aedibus B. G. Teubneri, 1898, pp. 43-45.

Composition mathématique de Claude Ptolémée, traduite pour la première fois du grec en français sur les manuscrits de la Bibliothèque du roi, par M. Halma, t. I, Paris Eberhart, 1813, pp. 34 et 35.

(2) T. 2, Paris, Courcier, 1817, Liv. III, ch. 2. pp. 41 et 42.

donc

$$\frac{\text{arc FE}}{\text{arc FD}} < \frac{\text{FL}}{\text{DH}}$$

ce qui est absurde, comme contraire au théorème de Clavius.

Je dis, en second lieu, que AC < AB.

Car, si cela n'était pas, on aurait AC = AB, ou AC > AB.

Supposons d'abord AC = AB. Les triangles DAC, DAB seraient alors entre eux comme les hauteurs abaissées sur ces côtés. D'où

$$\frac{\text{DG}}{\text{DH}} = \frac{\text{tr DAC}}{\text{tr DAB}} = \frac{\text{DC}}{\text{DB}} = \frac{\text{arc DE}}{\text{arc DF}}$$

ce qui est impossible, comme contraire au théorème de Clavius.

Supposons enfin AC > AB. Dans les triangles DAC, DAB, le rapport des aires sera inférieur à celui des hauteurs abaissées sur les côtés AC, AB. Donc

$$\frac{\text{DG}}{\text{DH}} > \frac{\text{tr DAC}}{\text{tr DAB}} = \frac{\text{DC}}{\text{DB}} = \frac{\text{arc DE}}{\text{arc DF}}$$

ce qui est impossible, comme contraire au théorème de Clavius.

Prop. 11. Étant donnés, un point A, et trois droites AB, AD, AC, issues de ce point; AD à l'intérieur de l'angle BAC, formé par les deux autres : on prend un point E, sur une des deux droites extérieures, AB, par exemple. Je dis qu'on peut mener, par E, une sécante EHI, rencontrant AD, en H ; et AC, en I ; de manière à avoir

$$\frac{\text{EH}}{\text{HI}} = \frac{\text{F}}{\text{G}}$$

F et G étant deux longueurs données.

Prop. 12. Cette sécante est unique.

Prop. 13. Étant données les trois droites AB, AD, AC, disposées comme dans la prop. 11 : on prend le point E, cette fois, sur la droite intérieure, AD ; je dis, qu'on peut mener, par E, une sécante HEI, rencontrant AB, en H ; AC, en I ; de manière à avoir

$$\frac{\text{HE}}{\text{EI}} = \frac{\text{F}}{\text{G}}$$

F et G étant deux longueurs données.

Prop. 14. Cette sécante est unique.

Les démonstrations de ces quatre propositions sont restées classiques. On les donne encore couramment aujourd'hui.

Deux remarques : Si l'auteur prend le point sur une droite, ce qui semble inutile, c'est parce que c'est la forme sous laquelle il se servira de la proposition. Ensuite, dans les deux cas, la droite doit être divisée, par le point intérieur, dans le rapport donné ; le problème est donc toujours possible.

III

Désormais, nous n'aurons plus affaire qu'à des théorèmes de mécanique. A l'exemple de della Faille, nous nommerons, sans qualificatif, *diamètre* d'un segment ou d'un secteur circulaire, le diamètre qui passe par le milieu de leur arc. Nous appellerons, de même, *diamètre* d'un segment ou d'un secteur elliptique, celui qui est conjugué à la corde soustendant les extrémités de l'arc.

Della Faille se propose de démontrer, d'abord, que dans le segment et le secteur circulaires, le diamètre est un premier lieu géométrique du centre de gravité. C'est là le but, qui impose l'ordre logique des théorèmes. La théorie des centres de gravité des segments et des secteurs elliptiques se déduira, tout entière, de celle des segments et des secteurs circulaires ; il est donc naturel de la donner en second lieu. Mais, les démonstrations relatives aux diamètres des segments de cercle, s'appliquent, sans modifications, aux segments elliptiques. Pour éviter les répétitions, della Faille expose les deux théories simultanément. Il n'en est pas de même pour les secteurs.

Della Faille débute par trois théorèmes généraux, supposés implicitement par Archimède, mais dont l'énoncé explicite donne une grande élégance aux démonstrations. Pour établir ces théorèmes, l'auteur s'appuie sur un postulat, implicitement supposé,

lui aussi, par Archimède, mais formulé en termes exprès par Luc Valerio (1) : « Une figure pesante n'a qu'un centre de gravité. »

Prop. 15. Si des figures, en nombre arbitraire, ont, toutes, leurs centres de gravité en ligne droite, le centre de gravité de l'ensemble est sur la même droite.

La démonstration se fait par l'absurde.

Soit plusieurs figures, en nombre arbitraire, ayant leurs centres de gravité, A, B, C, D, E, rangés en ligne droite, de la gauche vers la droite, dans l'ordre alphabétique; je dis que le centre de gravité, F, de l'ensemble est sur la droite indéfinie qui passe par A, E.

Que cela ne soit pas, et supposons F en dehors de la droite AE. Joignons AF. Le centre de gravité H, de l'ensemble des figures B, C, D, E, restantes autres que A, doit se trouver (I, 8) en un point du prolongement de AF au delà de F; donc, en dehors de la droite AE.

Joignons B, H. Le centre de gravité K de l'ensemble des figures restantes, C, D, E, doit se trouver sur le prolongement de BH au delà de H; donc en dehors de AE.

Joignons C, K. Le centre de gravité M de l'ensemble des figures restantes D, E sera de même en dehors de AE.

Joignons enfin D, M. Le centre de gravité O de la figure restante E, doit se trouver sur le prolongement de DM, au delà de M; donc en dehors de AE. Mais le centre de gravité de cette figure doit, par hypothèse, être en E. La figure aurait donc deux centres de gravité; ce qui est impossible.

Prop. 16. Conservons les mêmes hypothèses et les mêmes notations. Le centre de gravité F de l'ensemble se trouve entre les centres de gravité extrêmes A, E.

(1) *De centro gravitatis Solidorum Libri Tres Lucae Valerii Mathematicae & Civilis Philosophiae in Gymnasio Romano Professoris.* Romae, Typis Bartholomaei Bonfandini. MDCIIII. Superiorum Permissu; lib. I, p. 6.

De Centro Gravitatis Solidorum Libri Tres Lucae Valerii... Bonnoniae, Ex Typographia Haeredum de Ducciis, MDCLXI; p. 5.

C'est della Faille lui-même qui invoque en note l'autorité de Valerio. Quant au mérite de l'ouvrage de Valerio, je ne puis que renvoyer au mémoire que je lui ai consacré ici même l'an dernier : *Les démonstrations par l'analyse infinitésimale, chez Luc Valerio* (Ann. t. 37, 2e part., pp. 211-228).

Le raisonnement est la répétition du précédent.

Pour fixer les idées supposons que le centre de gravité F de l'ensemble tombe sur le prolongement de EA, au delà de A; donc, à gauche de A, tandis que E est à droite. Les centres de gravité successifs, H, K, M, O, sont échelonnés sur le prolongement de EA de plus en plus vers la gauche. Donc la dernière figure devrait avoir deux centres de gravité; l'un, par démonstration en O, à gauche de A; l'autre, par hypothèse, en E, à droite de A; ce qui est impossible.

Prop. 17. Étant donné un segment circulaire ou elliptique, dans lequel est inscrit une ligne brisée fermée par la corde du segment; si on enlève le polygone ainsi formé, je dis que le centre de gravité de la figure composée par l'ensemble des segments restants, est à l'intérieur du segment primitif donné.

Le raisonnement est calqué sur les deux précédents; mais il demande quelques observations.

Un segment circulaire ou elliptique étant une figure entièrement concave, son centre de gravité doit, d'après Archimède, (P, 7) tomber à l'intérieur du segment. Cela étant, soient A, B, C, D, E, les centres de gravité des segments restants après l'enlèvement du polygone. Supposons que le centre de gravité F de l'ensemble puisse être situé en dehors du segment donné. Joignons AF. Le centre de gravité H de l'ensemble des figures restantes B, C, D, E, devrait être situé sur AF, au delà de F (I,8); donc, en dehors du segment. En continuant le raisonnement, on trouverait que le centre de gravité du dernier segment devrait être à la fois en un point E intérieur et en un point O extérieur à ce segment; ce qui est absurde.

Ce raisonnement suppose que si on joint un point A intérieur au segment, à un point F extérieur, tout point situé sur AF, au delà de F, doit tomber en dehors du segment. Cela est supposé connu par les théories du cercle et de l'ellipse.

Avec la proposition 18, commence à proprement parler, la recherche du premier lieu géométrique du centre de gravité du cercle et de l'ellipse. Dans cette proposition, della Faille parle, sans la définir, d'une figure inscrite *évidemment*, « figura evidenter inscripta », dont il sera au surplus encore bien souvent question plus tard. Sous ce nom il s'agit des figures polygonales dites par

7.

…teur,
…m
pou…
dell… *it en*
pei… *D et*
n'e… *rpo-*
me…
la… *AF*
so… *gle*
in… *ent*
d… *gle*
p… *F ;*
A.
…ne
h-
…
…t
t

…νωρίμως ; je traduirais : d'une
in the recognised manner »,

…ites γνωρίμως dans un segment
…onales régulières joignant les
…n bissections de l'arc. Dans le
successives de l'arc étaient obte-
…êtres conjugués aux cordes. Pour
…aille je devrais traduire : Ligne
…ession sonne bien étrangement à
…eyrard : Ligne inscrite *régulière-*
…es, il importe toutefois de remar-
…és de la ligne est essentiel. Heiberg
…nscripta ; figure *proprement* inscrite.
…s heureux que *proprement*.
corde du segment, la ligne inscrite
obtient le *Polygone* inscrit *régulière-*
…d on la ferme par les deux rayons du
…ygone inscrit *régulièrement* dans le
one, della Faille dit : *Figure* ; mais il
bitudes de dire : *Polygone*. J'emploierai

gravité d'un polygone inscrit régulière-
…culaire, ou elliptique, est sur le diamètre

…, par des parallèles à la corde du segment,
…ne inscrit régulièrement. La théorie des
d que cela est possible. Le polygone est
e série de trapèzes terminée par un triangle.
gment passe par les milieux de toutes les
…apèzes, et par le sommet du triangle.
démontré (I,15), que le centre de gravité du
…ite qui joint les milieux des bases parallèles ;
…gle (I,13) est sur la médiane.
… de gravité de toutes les figures qui com-

…*rchimedes*, p. 204. Cambridge at the University presses,

posent le polygone inscrit régulièrement sont sur le diamètre du segment. Donc, d'après la prop. 15 ci-dessus, il en est de même du centre de gravité de l'ensemble ; c'est-à-dire du polygone.

Prop. 19. Le centre de gravité d'un segment circulaire, ou elliptique, est sur le diamètre du segment.

Supposons d'abord que le segment ne soit pas supérieur à un demi-cercle, ou à une demi-ellipse.

La démonstration se fait par l'absurde. Della Faille use d'un artifice plusieurs fois employé par Archimède (I,13 et II,4). Com-

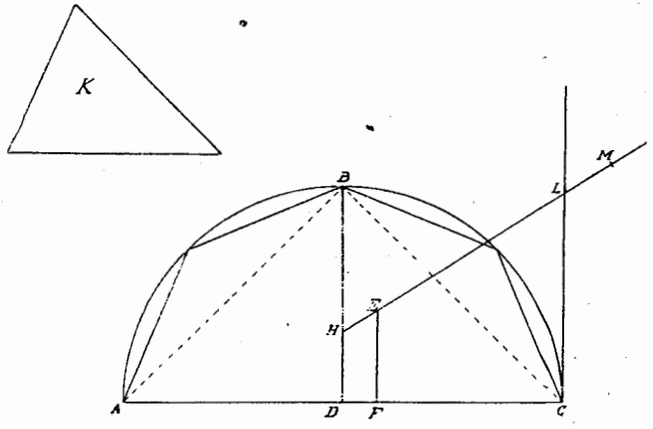

Fig. 5

mandino s'en sert couramment, dans son traité du *Centre de gravité des solides* (1) et j'ai rappelé en quoi il consiste dans mon mémoire : *Sur quelques exemples de la méthode des limites chez Simon Stevin* (2) ; mais on verra quelle élégance l'emploi de la prop. 17 donne à la fin de la démonstration du Syracusain.

Soit (fig. 5) ABC le segment donné et DB son diamètre.

Que le centre de gravité du segment ne tombe pas sur DB,

(1) *Federici Commandini Vrbinatis liber de Centro Gravitatis Solidorum.* Bononiae, Ex Officina Alexandri Benacii. M. D. LXV ; passim.

(2) Ann. de la Soc. scient. de Bruxelles. t. 37, Brux. 1912-13, 2e part. pp. 173-176.

les Grecs inscrites dans un segment γνωρίμως ; je traduirais : d'une manière reconnaissable. « Inscribed in the recognised manner », dit très bien M. Heath (1).

Quoi qu'il en soit, les *lignes* inscrites γνωρίμως dans un segment de cercle étaient les lignes polygonales régulières joignant les points de division obtenus par 2^n bissections de l'arc. Dans le segment elliptique, les divisions successives de l'arc étaient obtenues par les extrémités des diamètres conjugués aux cordes. Pour me conformer au style de della Faille je devrais traduire : Ligne inscrite *évidemment*. Mais l'expression sonne bien étrangement à l'oreille. Je préfère dire avec Peyrard : Ligne inscrite *régulièrement*. Pour éviter les équivoques, il importe toutefois de remarquer que le nombre 2^n des côtés de la ligne est essentiel. Heiberg traduit par : Figura *proprie* inscripta ; figure *proprement* inscrite. *Régulièrement* me semble plus heureux que *proprement*.

Quand on ferme, par la corde du segment, la ligne inscrite régulièrement dans l'arc, on obtient le *Polygone* inscrit *régulièrement* dans le *segment*. Quand on la ferme par les deux rayons du secteur, on obtient le *Polygone* inscrit *régulièrement* dans le *secteur*. Au lieu de *Polygone*, della Faille dit : *Figure* ; mais il est plus conforme à nos habitudes de dire : *Polygone*. J'emploierai ce dernier mot.

PROP. 18. Le centre de gravité d'un polygone inscrit régulièrement dans un segment circulaire, ou elliptique, est sur le diamètre du segment.

Joignons, deux à deux, par des parallèles à la corde du segment, les sommets du polygone inscrit régulièrement. La théorie des coniques nous apprend que cela est possible. Le polygone est ainsi décomposé en une série de trapèzes terminée par un triangle. Or, le diamètre du segment passe par les milieux de toutes les bases parallèles des trapèzes, et par le sommet du triangle.

Mais Archimède a démontré (I,15), que le centre de gravité du trapèze est sur la droite qui joint les milieux des bases parallèles ; et que celui du triangle (I,13) est sur la médiane.

Donc, les centres de gravité de toutes les figures qui com-

(1) *The Works of Archimedes*, p. 204. Cambridge at the University presses, 1897.

posent le polygone inscrit régulièrement sont sur le diamètre du segment. Donc, d'après la prop. 15 ci-dessus, il en est de même du centre de gravité de l'ensemble ; c'est-à-dire du polygone.

PROP. 19. Le centre de gravité d'un segment circulaire, ou elliptique, est sur le diamètre du segment.

Supposons d'abord que le segment ne soit pas supérieur à un demi-cercle, ou à une demi-ellipse.

La démonstration se fait par l'absurde. Della Faille use d'un artifice plusieurs fois employé par Archimède (I,13 et II,4). Com-

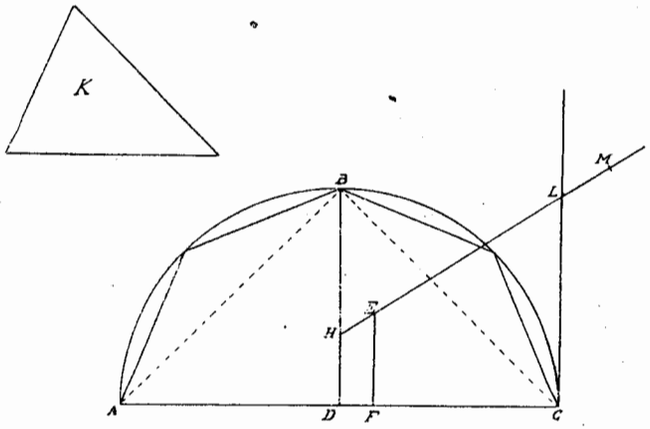

FIG. 5

mandino s'en sert couramment, dans son traité du *Centre de gravité des solides* (1) et j'ai rappelé en quoi il consiste dans mon mémoire : *Sur quelques exemples de la méthode des limites chez Simon Stevin* (2) ; mais on verra quelle élégance l'emploi de la prop. 17 donne à la fin de la démonstration du Syracusain.

Soit (fig. 5) ABC le segment donné et DB son diamètre.

Que le centre de gravité du segment ne tombe pas sur DB,

(1) *Federici Commandini Vrbinatis liber de Centro Gravitatis Solidorum.* Bononiae, Ex Officina Alexandri Benacii. M. D. LXV ; passim.

(2) ANN. DE LA SOC. SCIENT. DE BRUXELLES. t. 37, Brux. 1912-13, 2e part. pp. 173-176.

mais en E, par exemple. Della Faille ne le rappelle pas ici, mais il suppose connu, par un postulat d'Archimède (P, 7), déjà invoqué ci-dessus, que le point E doit tomber à l'intérieur du segment.

Menons EF parallèle à BD ; joignons AB, CB ; puis, construisons une surface K par la proportion

$$\frac{K}{\text{Tr. ABC}} = \frac{DF}{FC}$$

Dans le segment, inscrivons régulièrement un polygone d'un nombre de côtés assez grand, pour qu'en enlevant ce polygone du segment donné, la figure formée par l'ensemble des segments restants ait une aire inférieure à celle de K. Della Faille ne démontre pas que la chose soit possible. C'est qu'il la suppose établie dans la théorie des coniques. Il avait pour agir ainsi l'exemple d'Archimède, dans la proposition analogue relative au segment de parabole (II, 4). Au surplus, la démonstration donnée par Archimède lui-même, dans la prop. 20 du traité de la *Quadrature de la Parabole*, s'applique avec des modifications insignifiantes au cercle et à l'ellipse (1).

Représentons, par P, le polygone inscrit régulièrement; et, par Σs, la figure formée par l'ensemble des petits segments restants,

(1) Voici en quoi consiste la démonstration d'Archimède. Soit (fig. 5) ABC un segment de parabole. Menons le diamètre DB du segment. Si on joint BA, BC, le triangle ABC est supérieur à la moitié du segment.

En effet, la tangente en B est parallèle à AC. Or, si par A et C nous menons des parallèles à DB, le triangle ABC vaut la moitié du parallélogramme ainsi formé, comme ayant même base et même hauteur. Mais, le segment est tout entier intérieur au parallélogramme. Il est donc plus petit que lui ; et par conséquent le triangle est plus grand que la moitié du segment. Le raisonnement vaut pour le segment elliptique, quand il n'est pas supérieur à la moitié de l'ellipse.

Après ce théorème, Archimède en déduit le corollaire suivant :

Corollaire. Il résulte de cette démonstration, qu'il est possible d'inscrire dans un segment, un polygone tel, que l'ensemble des segments restants soit inférieur à un espace donné. Car, si par l'application de cette proposition on enlève toujours les espaces, on finira par rendre ce qui reste du segment inférieur à un espace donné.

C'est le principe même de la méthode d'exhaustion des anciens. Nous ne pouvons que renvoyer aux nombreux auteurs qui en ont traité.

quand P est enlevé du segment donné. Soit H, le centre de gravité de P; et M, celui de de Σs.

Menons CL parallèle à DB dans le sens DB. Puisque, par hypothèse, ABC n'est pas supérieur au demi-cercle, ou à la demi-ellipse, CL est tout entière extérieure au segment.

Joignons HE ; et soit L son point de rencontre avec CL.

Le centre de gravité de Σs doit se trouver (I, 8) sur le prolongement de HE au delà de E, en un point M déterminé par la proportion

$$\frac{HE}{EM} = \frac{\Sigma s}{P}$$

D'autre part

$$\frac{\Sigma s}{P} < \frac{K}{\text{tr ABC}} = \frac{DF}{FC} = \frac{HE}{EL}$$

d'où

$$\frac{HE}{EM} < \frac{HE}{EL}$$

et, par suite $EM > EL$.

Donc, le centre de gravité de Σs tombera à l'extérieur du segment donné; ce qui est contraire à la proposition 17.

Comparons la fin de cette démonstration à celle d'Archimède, dans les propositions analogues (I, 13; II, 4). Après avoir établi comme ci-dessus l'inégalité $EM > EL$, Archimède dit : « Ce qui ne peut être; car, tous les segments tomberaient d'un même côté de CL. » D'où vient cette impossibilité? Archimède ne le dit pas explicitement; mais, on le devine sans peine : c'est une conséquence du postulat 7 et du théorème 8 du livre I, *De l'Équilibre des plans*. Si nous essayions de l'en déduire, nous serions naturellement conduit à un raisonnement analogue à celui de della Faille.

Supposons, en second lieu, le segment supérieur au demi-cercle ou à la demi-ellipse.

Menons un diamètre parallèle à la corde du segment.

Le segment donné sera ainsi décomposé en un demi-cercle, ou une demi-ellipse, et un trapèze curviligne. Ce dernier est lui-

même la différence de deux segments, ne dépassant pas le demi-cercle, ou la demi-ellipse. La démonstration se déduit alors de la première partie, à l'aide du théorème (I, 8) d'Archimède et de la prop. 15 ci-dessus, par un raisonnement trop simple pour être reproduit au long ici.

PROP. 20. Le centre de gravité d'un secteur circulaire est sur la bissectrice du secteur.

Supposons d'abord l'angle du secteur inférieur à deux droits.

Menons la corde, qui joint les extrémités de l'arc du secteur. Elle divise le secteur en un triangle et un segment. Or, la bissectrice du secteur est médiane du triangle; elle renferme donc (I, 13) le centre de gravité du triangle. Cette bissectrice est aussi diamètre du segment; elle renferme donc (prop. 19) le centre de gravité du segment. Donc, enfin, cette bissectrice contient le centre de gravité de l'ensemble du triangle et du segment, c'est-à-dire, du secteur.

Supposons, en second lieu, que l'angle du secteur soit égal ou supérieur à deux droits.

La bissectrice du secteur donné le divise en deux secteurs égaux, dont l'angle est inférieur à deux droits.

Mais, on sait par Archimède (P. 4), que si on fait coïncider deux figures égales, leurs centres de gravité coïncideront. Donc, les centres de gravité des deux secteurs égaux se trouvent sur leurs bissectrices à la même distance du centre de la circonférence.

Donc, le milieu de la droite qui les joint est sur la bissectrice du secteur donné.

Donc enfin, le centre de gravité du secteur donné est lui-même (I, 4) sur la bissectrice de ce secteur.

PROP. 21. Si d'un secteur circulaire, ou elliptique, on enlève un polygone inscrit régulièrement, la figure formée par l'ensemble des petits segments restants après la suppression du polygone, a son centre de gravité sur le diamètre du segment.

Conséquence des prop. 18, 19, et d'Archimède (I, 8).

PROP. 22. Le centre de gravité d'un polygone inscrit régulièrement, dans un secteur circulaire, est sur le diamètre du secteur.

Conséquences des prop. 20, 21, et d'Archimède (I, 8).

IV

Les neuf propositions suivantes (23-31) forment une série comparable à celle des neuf premières.

On le verra plus loin, les prop. 30 et 31, réunies en un seul énoncé, pourraient se formuler comme suit : Le centre de gravité d'un secteur circulaire n'est jamais à une distance du centre du cercle, égale aux 2/3 du rayon; mais, dans tout cercle, on peut prendre un secteur assez petit, pour que la distance de son centre de gravité aux 2/3 du rayon, soit inférieure à une longueur donnée arbitrairement.

A partir de la 23^{me}, toutes les propositions s'enchaînent dans un ordre logique impeccable, pour établir en toute rigueur l'existence de cette nouvelle quantité qui tend vers zéro. C'est, qu'encore une fois, la démonstration de la prop. 32 en dépend.

A moins d'indications contraires, dans toutes les propositions qui suivent, il s'agit de secteurs, dont l'angle est inférieur à deux droits.

PROP. 23. Trouver le centre de gravité d'un polygone inscrit régulièrement dans un secteur circulaire.

Soit (fig. 6) ABC, le secteur circulaire; et ABCFDE, le polygone inscrit régulièrement dans ce secteur. Le secteur est formé de triangles isocèles égaux entre eux.

Considérons un des triangles extrêmes, FBC, par exemple.

Menons la médiane BI de ce triangle; elle est en même temps bissectrice du secteur FBC, dans lequel le triangle est inscrit.

De même, BK est à la fois bissectrice du secteur ABF, et du polygone ABFDE, qui lui est inscrit; BD est bissectrice du secteur ABC, et du polygone ABCFDE, qui lui est inscrit.

Soit M, le centre de gravité du triangle FBC (1). Archimède a démontré (I, 14) que ce centre est aux 2/3 de la médiane à partir du sommet.

---

(1) Ces données ne diffèrent pas de celles de la prop. 26. Pour abréger, nous ne les répéterons pas, quand nous arriverons à cette proposition.

Par M, menons une sécante MGL, rencontrant BD, en G ; et BK, en L ; de telle manière que (prop. 11)

$$\frac{GL}{GM} = \frac{\text{tr FBC}}{\text{pol ABFDE}}$$

ce qui se fera aisément, en comptant le nombre des triangles du polygone inscrit régulièrement ; G, sera le centre de gravité du polygone.

G, doit être sur la bissectrice BD (prop. 22). Della Faille

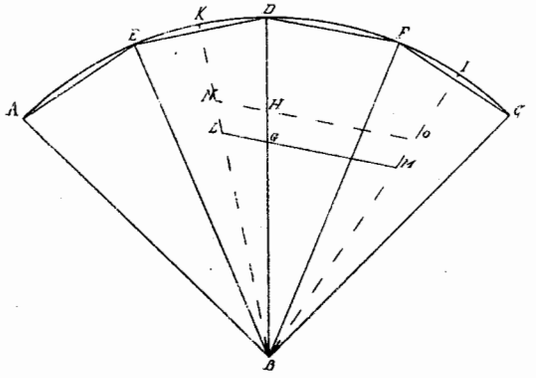

Fig. 6

démontre, par l'absurde, en s'appuyant sur les prop. 12 et (I, 8), qu'il ne saurait pas se trouver sur BD, en un point différent de celui qui a été obtenu par la construction.

Prop. 24. Dans un secteur circulaire, le centre de gravité du secteur est plus près de l'arc, que le centre de gravité du triangle formé par la corde et les deux rayons.

Le secteur est formé par l'ensemble du triangle et du segment.

Or, la bissectrice du secteur est médiane du triangle, et diamètre du segment.

Le centre de gravité du triangle (I, 14) est donc sur cette bissectrice à l'intérieur du triangle.

Le centre de gravité du segment est aussi (prop. 19) sur la bissectrice et à l'intérieur du segment (P. 7).

Donc (prop. 16) le centre de gravité du secteur est entre les deux. Donc il est plus près de l'arc que le centre de gravité du triangle.

Prop. 25. Soit (fig. 6) ABC, un secteur circulaire ; BD, sa bissectrice ; H, son centre de gravité. On divise le secteur donné en deux autres, ABF, FBC. Soit BK, la bissectrice de ABF ; et BI, celle de FBC. Si l'on mène, par H, une sécante NHO, rencontrant BK, en N ; et BI, en O ; de telle manière que

$$\frac{HN}{HO} = \frac{\text{ang FBI}}{\text{ang FBK}} ;$$

je dis que N et O seront respectivement les centres de gravité des secteurs ABF, FBC.

On sait (prop. 20) que H doit être sur BD.

Ceci remarqué, on a successivement

$$\frac{HN}{HO} = \frac{\text{ang FBI}}{\text{ang FBK}} = \frac{\text{ang FBC}}{\text{ang FBA}} = \frac{\text{sect FBC}}{\text{sect FBA}}$$

La sécante est donc divisée en parties inversement proportionnelles aux secteurs qui agissent à ses extrémités. Della Faille en conclut alors, par l'absurde, en appliquant les prop. 14, 20 et (I, 8) que N et O sont bien les centres de gravité des deux secteurs ABF, FBC.

Prop. 26. On donne (fig. 6) un secteur ABC, dont le centre de gravité est H ; un polygone inscrit régulièrement ABCFDE, dont le centre de gravité est G. Je dis que G est en-dessous de H ; c'est-à-dire, que le centre de gravité du polygone est plus rapproché du sommet de l'angle du secteur, que le centre de gravité du secteur.

Della Faille prouve, par l'absurde, que G ne peut être ni confondu avec H, ni situé au delà. Le lecteur aura déjà remarqué la prédilection de notre auteur pour la réduction à l'absurde ; mais, j'abrège, en donnant à son raisonnement la forme directe.

Supposons effectuées de nouveau les constructions du commencement de la prop. 23.

Joignons M, G.

Le centre de gravité du polygone ABFDE se trouve (I, 8) sur le

prolongement de MG ; il est aussi (prop. 22) sur BK. Il est donc, en L, intersection de MG et de BK.

Par conséquent (I, 6 et 7)

$$\frac{GL}{GM} = \frac{\text{tr FBC}}{\text{pol ABFDE}}$$

Par H, menons NHO parallèle à LGN. On aura successivement :

$$\frac{HN}{HO} = \frac{GL}{GM} = \frac{\text{tr FBC}}{\text{pol ABFDE}} = \frac{\text{ang FBC}}{\text{ang FBA}} = \frac{\text{ang FBI}}{\text{ang FBK}}$$

Donc (prop. 25), N et O, sont les centres de gravité des secteurs ABF, et FBC.

Mais, on a démontré (prop. 24) que le centre de gravité M du triangle FBC, est en dessous du centre de gravité O, du secteur dans lequel le triangle est inscrit.

Donc G est au-dessous de H.

Prop. 27. Étant donné un secteur circulaire, on peut lui inscrire un polygone régulièrement, qui soit tel, que la distance entre le centre de gravité du secteur et celui du polygone soit moindre qu'une longueur arbitraire donnée.

Archimède (II, 6) a un théorème analogue pour le segment parabolique ; della Faille s'inspire de la démonstration.

Soit ABCD (fig. 7) le secteur circulaire donné ; S, sa surface ; P, le polygone inscrit régulièrement ; Σs, la figure formée par les petits segments qui restent, quand on enlève P du secteur.

Menons la bissectrice BD du secteur.

Soit E, le centre de gravité de S ; I, celui de P ; H, celui de Σs. Nous savons (prop. 26) que I se trouve sur la bissectrice, entre E et B.

Prenons, sur la bissectrice, de E vers B, une longueur EF égale à la longueur arbitraire donnée. Je dis que I finira par tomber entre E et F. Que cela ne soit pas. Construisons une surface G, telle que l'on ait

$$\frac{S}{G} > \frac{DE}{EF}$$

Multiplions le nombre des côtés de P, jusqu'à ce que l'on ait $\Sigma s < G$. Nous avons dit, ci-dessus (prop. 19), pourquoi della Faille ne justifie pas la possibilité de cette construction. Il vient, *a fortiori,*

$$\frac{S}{\Sigma s} > \frac{DF}{EF}$$

d'où

$$\frac{S - \Sigma s}{\Sigma s} > \frac{DF - EF}{EF}$$

ou

$$\frac{P}{\Sigma s} > \frac{DE}{EF}$$

Or, (I, 8) le centre de gravité, H, de Σs, est déterminé en

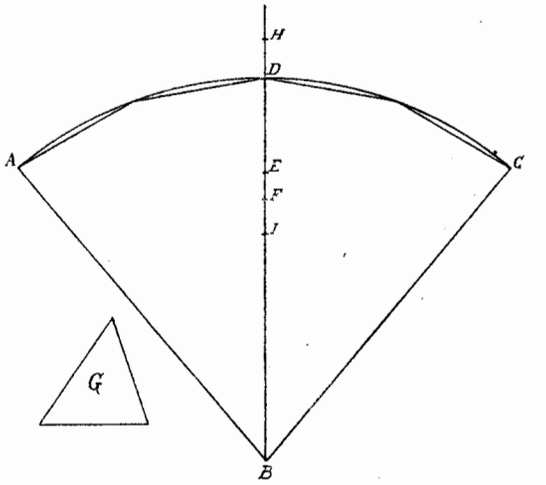

Fig. 7

prenant sur la bissectrice BD, dans la direction IE, un point H donné par la proportion

$$\frac{HE}{EI} = \frac{P}{\Sigma s}$$

d'où

$$\frac{HE}{EI} > \frac{DE}{EF}$$

Donc, si EI $\geqslant$ EF, on aura nécessairement HE $>$ DE. Donc, le centre de gravité H, de Σs, tombera en dehors du secteur ; ce qui est absurde (prop. 17). Nous disons : si EI $\geqslant$ EF ; mais della Faille, suivant une habitude de son temps, traite successivement les cas EI $=$ EF, et EI $>$ EF.

Pour terminer la démonstration, comme Archimède (II, 6), l'auteur aurait dû dire : Par H, menons une parallèle à AC, corde de l'arc du secteur ; tous les petits segments se trouvent d'un même côté de la parallèle, ce qui est impossible. Je ne pourrais que répéter à ce propos, les réflexions que j'ai faites à la fin de la prop. 19.

Prop. 28. Étant donnés un secteur circulaire et un polygone inscrit régulièrement dans le secteur ; le centre de gravité du polygone est à une distance du centre de la circonférence, moindre que les $\frac{2}{3}$ du rayon.

La démonstration de cette proposition est basée sur l'ingénieuse prop. 10.

Soit (fig. 6) G le centre de gravité du polygone inscrit régulièrement, ABCFDE ; M, celui du triangle extrême, FBC. L, celui du polygone restant ABFDE. Par un raisonnement analogue à celui de la prop. 26, on a

$$\frac{GL}{GM} = \frac{\text{ang FBI}}{\text{ang FBK}}$$

mais

$$\text{ang FBI} = \text{ang DBK} ; \quad \text{ang FBK} = \text{ang DBI}$$

donc

$$\frac{GL}{GM} = \frac{\text{ang DBK}}{\text{ang DBI}}$$

Or, quand le polygone inscrit régulièrement a plus de deux côtés,

ang DBI $>$ DBK ; et l'on se trouve dans les conditions de la prop. 10. Donc

$$GB < MB.$$

Si le polygone n'avait que deux côtés, la démonstration serait en défaut. L'inégalité précédente continuerait cependant à subsister, car, dans ce cas, le triangle LBM serait isoscèle ; MB serait l'un des deux côtés égaux, et GB la bissectrice de l'angle formé par ces deux côtés.

Or, M est, par hypothèse, le centre de gravité du triangle FBC ; ce point se trouve donc (1, 14) aux $\frac{2}{3}$ de la médiane AI ; et, par conséquent, à une distance du centre du cercle inférieure aux 2/3 du rayon.

Donc, *a fortiori*, la distance GB, du centre de gravité G du polygone inscrit régulièrement, au centre B du cercle, est inférieure aux $\frac{2}{3}$ du rayon.

Prop. 29. La distance du centre de gravité d'un secteur circulaire, au centre du cercle, ne peut pas dépasser les $\frac{2}{3}$ du rayon.

C'est un corollaire des deux propositions précédentes.

Supposons, en effet, que le centre de gravité du secteur puisse dépasser les $\frac{2}{3}$ du rayon d'une longueur l.

D'après la prop. 27, le centre de gravité du polygone inscrit régulièrement peut s'approcher du centre de gravité du secteur de moins que l ; il serait alors à une distance du centre de la circonférence supérieure aux $\frac{2}{3}$ du rayon ; ce qui est contraire à la prop. 28.

Prop. 30. La distance du centre de gravité du secteur circulaire, au centre du cercle, est inférieure aux 2/3 du rayon.

Soit ABC, un secteur circulaire ; BD, sa bissectrice ; E, le centre de gravité du secteur. Supposons que E puisse être, sur la bissectrice, à une distance

$$BE = \frac{2}{3} BD.$$

Menons les bissectrices BG, BF, des angles ABD, CBD. En E, élevons à BD la perpendiculaire HEI, rencontrant les bissectrices BG, BF, respectivement en H, I ; ces deux points seront (prop. 25) les centres de gravité des secteurs ABD, CBD.

Mais, HB et IB sont plus grands que EB. Donc, H et I seraient à une distance du centre supérieure aux $\frac{2}{3}$ du rayon ; ce qui est contraire à la prop. 29.

Prop. 31. Dans tout cercle, on peut prendre un secteur, dont la distance du centre de gravité au centre du cercle soit supérieure à une longueur arbitrairement donnée, mais plus petite que les 2/3 du rayon.

Il est intéressant de suivre, pas à pas, tout le raisonnement de della Faille.

Soit B, le centre du cercle donné. Menons un rayon BD quelconque ; et soit E une longueur telle que $E < \frac{2}{3}$ BD.

Prenons sur BD, une longueur

$$BF = \frac{3}{2} E < BD.$$

Par F, menons la corde GFH perpendiculaire à BD et les rayons BG, BH. Je dis que le secteur GBHD répond à la question.

En effet, BD est la bissectrice de ce secteur. Portons donc, sur BD, une longueur

$$BI = E$$

comme $E = \frac{2}{3}$ BF, I sera le centre de gravité du triangle GBH, (I, 14). Nommons K, le centre de gravité du segment GDH. Puisque K doit nécessairement tomber à l'intérieur de ce segment (P, 7), il tombera donc quelque part entre F et D. (Della Faille a démontré, dans la prop. 19, qu'il doit nécessairement se trouver sur BD diamètre du segment).

Or, I et K sont les centres de gravité des parties; donc, le centre de gravité, L, de l'ensemble, c'est-à-dire du secteur, doit tomber entre I et K (prop. 16); donc enfin

$$BL > BI$$

ce qui démontre la proposition.

Les constructions peuvent évidemment toutes se faire par la règle et le compas ; il importe de ne pas le perdre de vue.

Dans le théorème précédent, della Faille a démontré que BL doit rester inférieur à $\frac{2}{3}$ BD. Il est donc clair, comme je l'ai dit au commencement de ce paragraphe, que l'ensemble des théorèmes 30 et 31 revient à démontrer

$$\lim \left(\frac{2}{3} BD - BL \right) = 0.$$

Pourquoi della Faille n'a-t-il pas tiré des théorèmes 31 et 32 une conclusion équivalente ; en les mettant, par exemple, sous la forme

$$\frac{3}{2} DB - FB < l,$$

l désignant une longueur donnée arbitrairement petite ? Un géomètre moderne regarderait, comme une faute, de ne pas le faire.

Le contraire est vrai pour della Faille; j'y appelle l'attention. Dans la prop. 32, il emploiera les propositions 30 et 31, précisément sous la forme qu'il leur donne ici. Toute réflexion ultérieure lui est inutile. Jamais Archimède ne donne un corollaire, si intéressant soit-il, quand il ne sert pas directement au but qu'il poursuit. Personne n'a mieux imité en cela Archimède, que della Faille.

V

Prop. 32. On donne (fig. 8) un secteur circulaire ABC, dont l'angle est inférieur à deux droits. Soit BD sa bissectrice. Sur le prolongement de BD, prenons le point E tel que

$$\text{Tr BAE} = \text{Sect ABD} = \frac{1}{2} \text{Sect ABC}.$$

Sur le prolongement du rayon BA, prenons le point F, tel que le triangle FEB soit semblable à EAB. Prenons ensuite

$$BG = \frac{3}{2} BF$$

De B, comme centre, avec BG pour rayon, décrivons le secteur GBH. Je dis que E est le centre de gravité de GBH.

Car, que cela ne soit pas, et que le centre de gravité puisse être en un point K, distinct de E. Comme K doit se trouver sur la bissectrice BD (prop. 20), il tombera soit au delà de E soit en deçà. Supposons d'abord que K tombe sur BD, au delà de E.

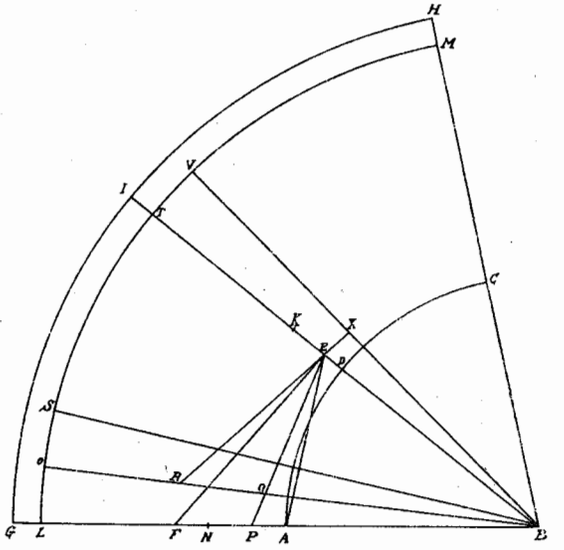

FIG. 8

Soit une longueur BT, telle que

$$\frac{BT}{BI} = \frac{BK}{BE}$$

De B, comme centre, avec BT pour rayon, décrivons le secteur

LBM. Les deux secteurs LBM, GBH sont deux figures semblables, dont E et K sont des points homologues. Or, par hypothèse, K est le centre de gravité de GBH; donc (P, 5) E est le centre de gravité de LBM.

Prenons, maintenant, sur BL un point N tel que

$$BN = \frac{2}{3} BL;$$

puis, menons la droite BO, comme il a été dit dans la proposition 9; c'est-à-dire de telle manière que la sécante EP soit divisée au point Q dans le rapport

$$\frac{PQ}{QE} = \frac{\text{ang } PBQ}{\text{ang } QBE}$$

et que de plus, si on construit

$$\frac{RB}{EB} = \frac{EB}{QB}$$

on ait

$$FB > RB > NB.$$

Construisons encore les angles

$$VBT = SBO = OBL;$$

OB est bissectrice de LBS; et VB bissectrice de SBM.

Joignons RE, et soit X, le point où RE prolongé rencontre VB.

Les triangles REB, QEB, ayant un angle commun, compris entre côtés proportionnels, sont semblables; donc

$$\text{ang } REB = \text{ang } EQB$$

donc aussi

$$\text{ang } XEB = \text{ang } PQB$$

comme supplémentaires des précédents.

Par conséquent, les triangles PBQ, EBX sont semblables, comme

équiangles, puisque les angles PBQ, EBX sont égaux par construction.

Ces deux derniers triangles donnent

$$\frac{QP}{QB} = \frac{EX}{EB}$$

les triangles semblables QEB, REB donnent de même

$$\frac{QB}{QE} = \frac{EB}{ER}$$

or, on a mené EP de manière à avoir

$$\frac{QP}{QE} = \frac{\text{ang QBP}}{\text{ang QBE}}$$

on déduit des trois rapports précédents

$$\frac{EX}{ER} = \frac{\text{ang QBP}}{\text{ang QBE}}$$

Mais, on a successivement, en passant par les intermédiaires de della Faille,

$$\frac{\text{ang QBP}}{\text{ang QBE}} = \frac{\text{ang 2OBL}}{\text{ang 2OBT}} = \frac{\text{ang SBL}}{\text{ang SBM}} = \frac{\text{sect SBL}}{\text{sect SBM}}$$

donc

$$\frac{EX}{ER} = \frac{\text{sect SBL}}{\text{sect SBM}}$$

Par conséquent (prop. 25), si E est le centre de gravité du secteur total LBM, R sera le centre de gravité du secteur partiel LBS, Mais, R ne saurait pas être le centre de gravité du secteur LBS, car

$$RB > NB = \frac{2}{3}LB$$

ce qui est impossible, d'après la prop. 30.

Donc enfin, K ne peut pas être situé sur la bissectrice BD au delà de E, puisqu'il s'ensuit une absurdité.

Supposons, en second lieu (fig. 9), que le centre de gravité K puisse être, sur BD, en deçà de E.

Soit, cette fois, BT une longueur telle que

$$\frac{BT}{BI} = \frac{BE}{BK}$$

De B, comme centre, avec BT pour rayon, décrivons le secteur LBM. Les deux secteurs GBH, LBM sont deux figures semblables, dont E,K sont des points homologues. Mais, par hypothèse, K est

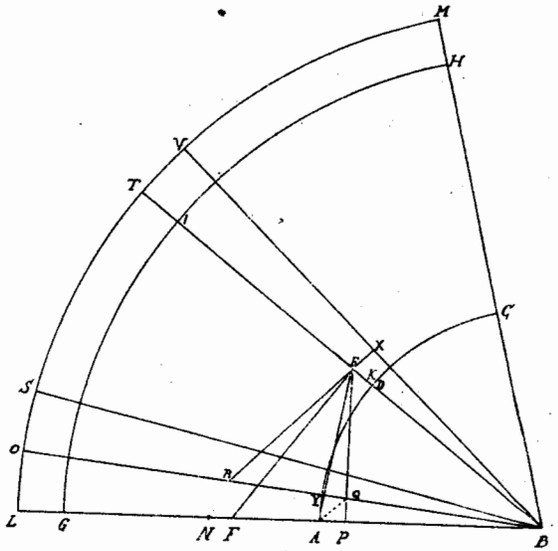

FIG. 9

le centre de gravité de GBH ; donc E est le centre de gravité de LBM (P. 5).

Sur BL, prenons un point N, tel que

$$BN = \frac{2}{3}BL$$

Prenons, ensuite, comme il a été dit dans la prop. 31, un secteur

LBS, tel que la distance de son centre de gravité R, au centre B du cercle, vérifie la double inégalité

$$\frac{2}{3}\mathrm{BL} = \mathrm{BN} > \mathrm{BR} > \mathrm{BF}.$$

La droite BRO est bissectrice de LBS ; donc, si on construit

$$\text{ang TBV} = \text{ang OBS}$$

BV sera bissectrice de SBM.

Joignons RE, et prolongeons cette droite jusqu'en X, où elle rencontre BV. E, étant le centre de gravité du secteur total LBM ; et R, celui de la partie LBS ; le centre de gravité de l'autre partie, SBM, doit se trouver (I, 8) sur le prolongement de RE. Mais, ce centre de gravité doit aussi se trouver (prop. 20) sur BV, bissectrice du secteur. C'est donc le point X.

On a, par conséquent

$$\frac{\mathrm{EX}}{\mathrm{ER}} = \frac{\text{sect LBS}}{\text{sect SBM}} = \frac{\text{ang } \frac{1}{2}\text{LBS}}{\text{ang } \frac{1}{2}\text{SBM}} = \frac{\text{ang OBL}}{\text{ang OBT}}$$

Soit, maintenant, sur la bissectrice BO, un point Q, tel que l'on ait

$$\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{BE}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BR}}$$

Prolongeons EQ jusqu'en P. On prouvera, comme dans la première partie, que REB, QEB sont semblables ; puis que PQB, XEB le sont. On en déduira

$$\frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{QE}} = \frac{\mathrm{EX}}{\mathrm{ER}}$$

d'où

$$\frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{QE}} = \frac{\text{ang OBL}}{\text{ang OBT}}$$

Donc, d'après la proposition 6, si nous joignons AQ, le triangle

AQB doit être équivalent au secteur ABY. Donc enfin, d'après la proposition 2,

$$\mathrm{BQ} > \mathrm{BA} \qquad (1)$$

D'autre part, comme on a simultanément

$$\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{BE}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BR}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BE}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BF}}$$

et comme on a pris BR > BF, il s'ensuit que

$$\mathrm{BQ} < \mathrm{BA} \qquad (2)$$

Or, les inégalités (1) et (2) sont contradictoires. Donc, le centre de gravité K, du secteur, ne peut pas tomber sur la bissectrice BD, en deçà de E, puisqu'il s'ensuivrait une contradiction. Donc enfin, le point E est le centre de gravité du secteur GBH.

Ce raisonnement achevé, récapitulons les principales propositions dont il y est directement fait usage.

Dans chacune des deux parties, on emploie un secteur, qui doit pouvoir se construire par la règle et le compas.

Dans la première partie, le secteur auxiliaire est celui de la prop. 9, qui se construit, à proprement parler, par le procédé donné dans la prop. 8. J'ai fait remarquer après la démonstration de la prop. 9, que la construction était toujours possible. L'absurdité provient de ce que le centre de gravité du secteur devrait être à une distance du centre du cercle, supérieure aux deux tiers du rayon ; ce qui est contraire à la prop. 30.

Dans la deuxième partie, le secteur se construit par le procédé de la prop. 31. Cette construction est toujours possible ; j'ai, de nouveau, pris soin de le remarquer. L'absurdité de l'hypothèse faite, se démontre par l'application des prop. 6 et 2. La contradiction consiste en ceci : une même longueur BQ devrait, d'une part, en vertu de sa construction, être inférieure à BA ; d'autre part, d'après la prop. 6, le triangle AQB serait équivalent au secteur ABY, et par suite, d'après la prop. 2, BQ devrait être supérieure à BA.

La démonstration étant ainsi réduite à ses grandes lignes, il est aisé de s'assurer que les 31 premières propositions ne sont qu'un long lemme préparant la prop. 32.

VI

Vient le problème inverse du précédent : Partir d'un secteur donné, pour déterminer sur la bissectrice, son centre de gravité. La solution n'offre plus grande difficulté.

Prop. 33. On donne (fig. 10) un secteur circulaire ABC. Soit BD, sa bissectrice. Prenons sur le rayon BA, un point E tel que

$$BE = \frac{2}{3}BA$$

De E, abaissons la perpendiculaire EF sur BD. Portons, enfin, sur

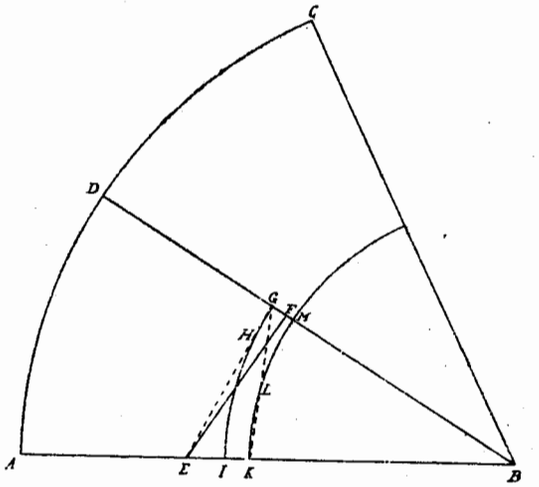

Fig. 10

BD, une longueur BG, déterminée par la proportion

$$\frac{BG}{EF} = \frac{BA}{\text{arc } AD}$$

Je dis, que G, est le centre de gravité du secteur donné ABC.

Prenons, sur AB, un point K, déterminé par la proportion

$$\frac{KB}{GB} = \frac{GB}{EB}.$$

Joignons K, G; et E, G. Les triangles KBG, EBG, sont semblables.

De B, comme centre, avec BG, pour rayon, décrivons l'arc GHI; enfin, du même centre, avec BK, pour rayon, décrivons l'arc KLM.

On a

$$\frac{\text{arc AD}}{AB} = \frac{\text{arc GI}}{BG} \quad \text{et} \quad \frac{\text{arc AD}}{AB} = \frac{EF}{BG}$$

d'où

$$\frac{\text{arc GI}}{BG} = \frac{EF}{BG}$$

et

$$\text{arc GI} = EF.$$

Or, le secteur GBI et le triangle GBE, ont le rayon BG commun. En vertu de l'égalité précédente, on a donc

$$\text{sect GBI} = \text{tr GBE}$$

Mais

$$\frac{\text{sect GBI}}{\text{sect KBM}} = \frac{GB^2}{KB^2} = \frac{\text{tr GBE}}{\text{tr GBK}}$$

Or, les numérateurs sont égaux ; donc

$$\text{sect KBM} = \text{tr GBK}$$

Par conséquent, toutes les conditions de la prop. 32 sont remplies (della Faille les énumère en détail) ; et G est le centre de gravité du secteur ABC.

Mais, la solution précédente est théorique. Pour la mettre sous une forme plus pratique, l'auteur remarque que EF vaut les $\frac{2}{3}$ de la demi-corde de l'arc ADC. Il obtient ainsi la prop. suivante :

Prop. 34. Étant donnés un secteur circulaire, et sa bissectrice; on détermine une longueur qui soit aux $\frac{2}{3}$ du rayon, comme la

corde du secteur est à son arc; en portant, à partir du centre, cette longueur sur la bissectrice, l'extrémité donnera le centre de gravité du secteur proposé.

Nommons d, cette longueur; R, le rayon du cercle; 2α, l'angle du secteur. En remarquant que

$$\frac{\text{corde AB}}{\text{arc ADB}} = \frac{2\sin\alpha}{2\alpha}$$

l'énoncé précédent peut s'écrire sous une forme algébrique

$$d = \frac{2}{3}\,\mathrm{R}\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

C'est la formule encore en usage aujourd'hui.

Prop. 35. On donne un segment ADC, dont l'arc ADC est inférieur à une demi-circonférence; on mène les rayons BA, BC et de C on abaisse la perpendiculaire CH, sur BA. Soit E, le centre de gravité du triangle ABC; et F, celui du secteur ABCD. On aura le centre de gravité, G, du segment, en divisant extérieurement FE dans le rapport

$$\frac{\text{GF}}{\text{GE}} = \frac{\text{CH}}{\text{arc ADC}}$$

En effet, le point F est le centre de gravité du tout; E, celui d'une des parties; donc, le centre de gravité, G, de l'autre partie doit laisser F au milieu et sa position est déterminée par la proportion (I, 8)

$$\frac{\text{GF}}{\text{FE}} = \frac{\text{Tr ABC}}{\text{segm. ABCD}}$$

d'où

$$\frac{\text{GF}}{\text{GF} + \text{FE}} = \frac{\text{Tr ABC}}{\text{Tr ABC} + \text{segm ABCD}}$$

ou encore, en remarquant que le triangle ABC et le secteur ABCD ont AC commun

$$\frac{\text{GF}}{\text{GE}} = \frac{\text{CH}}{\text{arc ADC}}.$$

Nous préférons, aujourd'hui, prendre pour inconnue la distance BG. Soit x cette distance. Continuons à représenter, par 2α, l'angle du secteur, et, par R, le rayon. La formule précédente devient

$$\frac{x - \frac{2}{3}\,\mathrm{R}\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}}{x - \frac{2}{3}\,\mathrm{R}\cos\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}$$

d'où on tire sans peine

$$x = \frac{2}{3}\,\mathrm{R}\,\frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}$$

ce qui est la formule usitée de nos jours.

Dans la proposition suivante, della Faille considère la demi-circonférence et le secteur dont l'arc est supérieur à une demi-circonférence. A aucune de ces deux figures il n'applique le nom de secteur; aussi ne songe-t-il pas à généraliser la formule de la prop. 32.

Prop. 36. Étant donné (fig. 11) un secteur ABC, dont l'arc est égal, ou supérieur à une demi-circonférence, menons la bissectrice, BD; la corde, AD; et la perpendiculaire BF, à AD. On aura le centre de gravité, G du secteur, en portant sur AD, une longueur BG, donnée par la proportion

$$\frac{\text{BG}}{\text{BF}} = \frac{\frac{2}{3}\,\text{corde AD}}{\text{arc AD}}.$$

Menons les bissectrices BE, BK, des secteurs ABD, DBC. Joignons E, K; on a

$$\text{EK} = \text{AD};$$

d'où

$$\text{BL} = \text{BF}.$$

Par G, menons HGI parallèle à EK. On a d'abord

$$\text{sect ADB} = \text{sect DBC}$$

De plus

$$\frac{BH}{BE} = \frac{BG}{BL \text{ ou } BF} = \frac{\frac{2}{3} \text{ corde AD}}{\text{arc AD}}$$

Mais, les angles des secteurs ABD, DBC, sont inférieurs à deux droits ; donc, d'après la prop. 34, H et I sont les centres de gravité des deux secteurs. Donc le centre de gravité du secteur total ABC est sur HI. Mais il doit être aussi sur la bissectrice BD (prop. 20). Donc enfin G est le centre de gravité du secteur ABC.

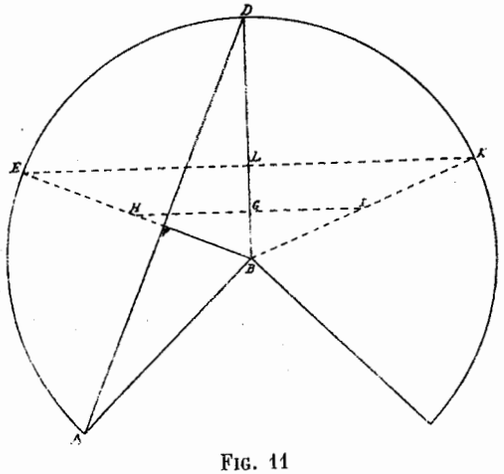

FIG. 11

Si nous représentons, par d, la distance BG, du centre de gravité du secteur donné au centre de la circonférence; par 2α, l'angle du secteur donné ; par R, son rayon ; la formule précédente peut s'écrire

$$\frac{d}{R \cos \frac{1}{2}\alpha} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2 \sin \frac{1}{2}\alpha}{\alpha}$$

d'où l'on tire sans peine

$$d = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

Mais, les méthodes purement géométriques, par lesquelles della Faille aurait dû faire des transformations équivalentes, les compliquent singulièrement. Peut-être ne les a-t-il pas vues. Plus probablement, cependant, n'a-t-il pas apprécié l'avantage d'une formule unique s'appliquant à tous les cas, quel que soit l'angle du secteur.

PROP. 37. Étant donné un segment ADC, dont l'arc ADC est supérieur à une demi-circonférence; on mène la bissectrice, BD, du segment, rencontrant l'arc ADC, en D ; et la corde, AC, en K ; on mène, en outre, les rayons BA, BC, et la perpendiculaire CH, sur le prolongement du rayon BA. Soit G, le centre de gravité du segment donné, E, celui du triangle ABC ; F, celui du secteur ABCD. On aura la position de G, en divisant intérieurement EF, dans le rapport

$$\frac{GF}{GE} = \frac{CH}{\text{arc ADC}}$$

En effet, le segment est formé par l'ensemble du triangle et du secteur. Donc, (1, 6 et 7) G doit tomber entre E et F, en un point de EF déterminé par la proportion

$$\frac{GF}{GE} = \frac{\text{Tr. ABC}}{\text{Sect. ABCD}}$$

Mais, le triangle ABC, et le secteur ABCD, ayant AB commun, il vient

$$\frac{CH}{\text{arc ADC}} = \frac{\text{Tr. ABC}}{\text{Sect. ABCD}} = \frac{GF}{GE}.$$

Pour nous, cette formule est une simple généralisation de celle de la prop. 35.

VII

Dans les huit dernières propositions, della Faille étend aux segments et aux secteurs elliptiques, les résultats qu'il vient d'obtenir pour le cercle. De nos jours, nous réunirions toutes ces propositions en un seul énoncé, comme suit :

« Si on considère un segment elliptique et un segment circulaire qui le projette coniquement, les centres de gravité des deux segments divisent leurs diamètres respectifs en parties proportionnelles. Même théorème, si on considère le secteur elliptique, comme projection conique du secteur circulaire. »

Par les projections, ces propositions sont à peu près intuitives. Mais à l'époque de della Faille la théorie des projections, du moins au sens moderne de ces mots, n'était guère faite (1). Tout au plus le jésuite l'eût-il admise comme procédé d'invention. Réduit au moyen des géomètres de son temps, ses démonstrations s'allongent donc ; je ne dis pas s'alourdissent : car, elles restent toujours rapides, naturelles, élégantes et sont parfois très ingénieuses.

Prop. 38. Si, dans un segment circulaire, ou elliptique, on inscrit un polygone régulièrement, le centre de gravité de la figure, formée par l'ensemble des segments restants après la suppression du polygone, se trouve plus près du point où le diamètre du segment perce l'arc de ce segment, que du point où le diamètre rencontre la corde.

Archimède a un théorème analogue (II 5) pour le segment parabolique ; comme toujours, della Faille s'inspire de la démonstration.

Soit (fig. 12) ABC un segment circulaire, ou elliptique ; KB son diamètre ; ADEFBGHIC le polygone inscrit régulièrement.

Menons les cordes BA, BC. Elles divisent le segment donné en un triangle ABC et deux segments, AEB, BHC. Ces segments renferment respectivement les polygones inscrits régulièrement, ADEFB, BGHIC.

Soit LE le diamètre du segment AEB ; N le centre de gravité de la figure restant après l'enlèvement du polygone inscrit régulièrement. N est sur LE (prop. 21). Soit, de même, MH le diamètre du segment BHC ; O, le centre de gravité de la figure restant après la suppression du polygone inscrit régulièrement. O est sur MH.

(1) Élève, à Anvers, de Grégoire de Saint-Vincent, qui lui-même avait eu dans cette ville, pour supérieur, François d'Aguillon, on peut affirmer sans le moindre doute que della Faille avait lu le Liv. VI du traité d'*Optique* de d'Aguillon, qui contenait ce qu'on avait écrit jusque là de plus complet sur la théorie des projections. *Francisci Aguilonii e Societate Jesu Opticorum Libri sex.* Antverpiae, Ex Officina Plantiniana, Apud Viduam et Filios Io. Moreti. M. DC. XIII.

Joignons NO. Le centre de gravité de la figure formée par tous les segments restants après la suppression du polygone inscrit régulièrement dans ABC se trouve sur NO (prop. 16). Mais, il est aussi sur KB (prop. 21). Donc il est au point, P, intersection de NO et KB.

Joignons ML. Cette droite est tout entière sous NO. Della Faille l'affirme, sans dire pourquoi. C'est qu'il suppose la propriété con-

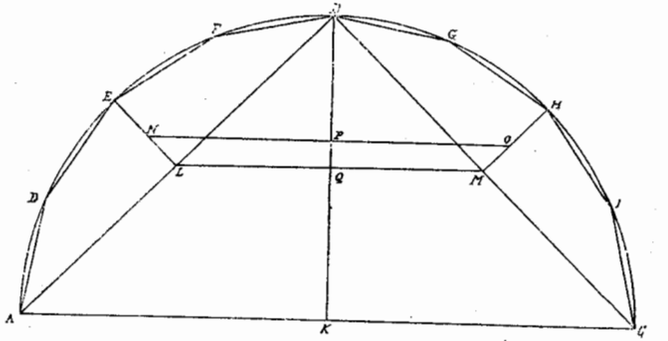

Fig. 12

nue par la théorie des coniques. Il suffit, pour la démontrer, de prolonger les diamètres jusqu'au centre du cercle, ou de l'ellipse.

Donc, continue l'auteur, le point Q, où LM rencontre KB, est en dessous de P. Mais, L et M sont les milieux des côtés du triangle ABC. Donc Q, est le milieu de KB.

Prop. 39. Le centre de gravité d'un segment circulaire, ou elliptique, est plus loin du point où le diamètre rencontre l'arc du segment, que de celui où il rencontre la corde.

La démonstration se fait par l'absurde. Elle est originale. Della Faille y distingue deux cas ; mais, le raisonnement ne différant pas, je les réunis.

Soit ABC, un segment circulaire, ou elliptique ; EB son diamètre ; D, le centre de gravité. D est sur EB.

Que D ne soit pas plus rapproché de E où le diamètre rencontre la corde que de B, où il rencontre l'arc.

Par D, menons la corde FDG parallèle à AC. Elle divise le segment donné, en un nouveau segment FBG, et un trapèze curviligne AFGC.

Ceci posé, si de D, comme centre de symétrie, nous décrivons sur FG, un segment FKG, égal et symétrique de FBC (della Faille dit : aequale et simile ; mais, les figures montrent bien ce qu'il entend par ce dernier mot) FKG sera tout entier intérieur au trapèze curviligne AFGC. De plus, le diamètre DK de ce segment est sur EB.

Soit, I, le centre de gravité de FBG ; et, H, celui de FKG. I (prop. 19) est sur DB ; et H, sur DK.

Mais, d'après le 2e postulat de Luc Valerio (1) « les centres de gravité de toutes les figures congruentes entre elles sont congrus ». Nous pourrions traduire ici : « Les centres de gravité des figures symétriques, sont des points symétriques ». Mais, le sens du postulat de Valerio est plus général.

Donc, ID = HD ; et par conséquent (P, 1), D est le centre de l'ensemble des deux segments FBG, FKG. Donc (P, 2) D, n'est pas le centre de gravité de l'ensemble FBG, AFGC ; car AFGC est composé du segment FKG, plus une autre partie.

A remarquer que, deux figures planes symétriques étant superposables, della Faille ne devait pas nécessairement recourir au postulat de Valerio ; mais il eût pu, semble-t-il, invoquer (P. 4). S'il ne le fait pas, il a eu ses raisons ; mais j'avoue ne pas les voir.

Prop. 40. Le centre de gravité d'un segment circulaire, ou elliptique, ne saurait coïncider avec celui d'un polygone inscrit régulièrement dans le segment.

En effet, soit G le centre de gravité du segment. Supposons qu'il soit aussi le centre de gravité du polygone inscrit régulièrement. Ce polygone étant une des parties du segment, il s'ensuivrait, d'après la prop. 18 du liv. I de Luc Valerio (1), que, G, devrait aussi être le centre de gravité de l'autre partie ; c'est-à-dire, de la figure formée par l'ensemble des segments restants après la suppression du polygone inscrit régulièrement.

(1) O. C. Éd. 1604, lib. I, p. 6. Éd. 1661, p. 5.
Le sens du postulat de Valerio est, que des figures de l'espace, égales symétriques, ou simplement semblables, ont leur centre de gravité en des points homologues.

Or, cette dernière conséquence est absurde. Car, le centre de gravité de la figure formée par l'ensemble des segments, restant après la suppression du polygone inscrit régulièrement, est situé sur le diamètre du segment donné, *au delà* (prop. 38) du point milieu de ce diamètre ; tandis que le centre de gravité du segment total se trouve sur ce diamètre, *en deçà* (prop. 39) du point milieu.

Prop. 41. Si on inscrit un polygone régulièrement, dans un segment circulaire, ou elliptique, le centre de gravité du segment est situé sur le diamètre, plus près du point où ce diamètre perce l'arc du segment, que ne l'est le centre de gravité du polygone.

C'est un corollaire des trois propositions précédentes et d'Archimède (I, 8).

Prop. 42. Étant donné un segment circulaire, ou elliptique, on peut lui inscrire un polygone régulièrement, tel que la distance entre le centre de gravité du polygone et celui du segment, soit inférieure à une longueur donnée arbitrairement.

La démonstration est analogue à celle de la prop. 31. Comparée à celle d'Archimède (II, 6), elle donne lieu aux mêmes observations.

A partir du théorème suivant, commence la comparaison du segment elliptique au segment circulaire qui le projette coniquement. On remarquera par quel détour della Faille doit remplacer la notion de projection.

Prop. 43. Étant donnés un segment circulaire et un segment elliptique tels, que le rapport du segment circulaire au cercle entier soit le même que celui du segment elliptique à l'ellipse entière ; si on inscrit régulièrement dans les deux segments, des polygones d'un même nombre de côtés, les centres de gravité des deux polygones divisent leurs diamètres respectifs en parties proportionnelles.

Au commencement de son deuxième livre de l'*Équilibre des*

(1) O ; C. Ed. 1604, lib. I, pp. 36 et 37. Éd. de 1661, p. 32.

plans, Archimède avait cru devoir rappeler quelques théorèmes démontrés dans la théorie de la parabole ; à son exemple, della Faille rappelle ici trois propositions, connues, dit-il, par les mathématiciens, et dont il suppose la démonstration faite dans la théorie des coniques. Il s'agit des polygones inscrits régulièrement, et des segments définis dans l'énoncé.

1) Si l'on joint, deux à deux, les sommets équidistants de la corde du segment, les droites qui les joignent sont parallèles à la corde, et divisées en deux parties égales par le diamètre du segment.

2) Les droites de jonction (parallèles aux cordes), qui se correspondent, dans le segment elliptique et le segment circulaire, sont proportionnelles aux cordes des deux segments.

3) Les segments étant proportionnels aux figures entières, les diamètres des segments sont proportionnels aux diamètres entiers.

Sous une forme plus moderne, les deux derniers théorèmes pourraient s'énoncer comme suit : Les ordonnées de l'ellipse projetée sont à celles du cercle projetant, dans le rapport de la corde de l'ellipse à la corde du cercle ; et les pieds de ces ordonnées divisent les diamètres respectifs en parties proportionnelles.

La démonstration est fort courte ; l'auteur indique très nettement la marche à suivre, mais sans effectuer toutes les transformations de proportions intermédiaires. Voici ce raisonnement dans ses grandes lignes :

Considérons deux trapèzes, qui se correspondent. Leurs centres de gravité divisent les droites qui joignent les milieux des bases parallèles en parties proportionnelles. Les centres de gravité des triangles divisent de même les médianes en parties proportionnelles. Donc, à cause du lemme 3 ci-dessus, les centres de gravité de toutes ces figures divisent leurs diamètres respectifs en parties proportionnelles.

Groupons maintenant, par deux, les trapèzes adjacents ; et les deux derniers trapèzes, avec les deux triangles. Cherchons les centres de gravité de ces groupes ; ils diviseront de nouveau leurs diamètres respectifs en parties proportionnelles.

En continuant à grouper de même par deux, les ensembles obtenus et ainsi de suite, on finit par arriver aux centres de gravité des deux polygones, qui divisent, eux aussi, leurs diamètres

respectifs, en parties proportionnelles. Ces calculs n'offrent pas de difficulté.

Prop. 44. Le centre de gravité des deux segments, définis dans la proposition précédente, divise leurs diamètres respectifs en parties proportionnelles.

La démonstration se fait par l'absurde. Au moyen des prop. 42 et 43, on prouve que, dans l'un des deux segments, les positions des centres de gravité, du polygone inscrit régulièrement, et du segment lui-même, finissent par contredire les conditions exigées par la prop. 41.

Prop. 45. Étant donnés deux secteurs, l'un elliptique et l'autre circulaire, tels que le rapport du secteur elliptique à l'ellipse entière soit le même que celui du secteur circulaire au cercle entier ; les centres de gravité des deux secteurs divisent leurs diamètres respectifs en parties proportionnelles.

Il est clair que cet énoncé détourné revient de nouveau à considérer un secteur elliptique qui pourrait être projeté coniquement par un secteur circulaire donné.

Considérons, en premier lieu, le cas où les angles des deux secteurs sont inférieurs à deux droits. Soient, ABC, le secteur circulaire ; *abc*, le secteur elliptique donnés. Nous affecterons de majuscules les constructions effectuées sur le cercle ; de minuscules, celles qui sont effectuées sur l'ellipse.

Menons les diamètres, BD, *bd,* des secteurs; et les cordes AB, *ab*. Elles seront divisées en deux parties égales par les diamètres, en E, et *e*. Donc ED et *ed* seront les diamètres des segments ADC, *adc* ; EB et *eb* les médianes des triangles ABC, *abc*.

On sait, par la théorie des coniques, dit della Faille, que

$$\frac{DE}{EB} = \frac{de}{eb}\cdot\frac{\text{seg. ADC}}{\text{cercle}} = \frac{\text{seg } adc}{\text{ellipse}}\cdot\frac{\text{seg. ADC}}{\text{Tr. ABC}} = \frac{\text{seg. } adc}{\text{Tr. } abc}$$

Soient F, *f,* les centres de gravité des segments ADC, *adc* ; ces points seront (prop. 19) sur DE et *de*. Soient encore G et *g*, les centres de gravité des triangles ABC, *abc* ; ces points seront (I, 13) sur EB et *eb*. On a donc (prop. 44 et I, 14)

$$\frac{DF}{FE} = \frac{df}{fc}\cdot\frac{EG}{GB} = \frac{eg}{gb}.$$

Soient, enfin, H et *h*, les centres de gravité des secteurs. On sait (1, 6 et 7) qu'ils doivent se trouver sur HG et *hg*, et que

$$\frac{\text{FH}}{\text{HG}} = \frac{\text{Tr. AB C}}{\text{Seg. ADC}} = \frac{\text{Tr. } abc}{\text{Seg. } adc} = \frac{fh}{hg}$$

Il est donc évident par là, ajoute della Faille, sans autres explications, que les points F, H, E, G, divisent le demi-diamètre DB, de la même manière que les points *f*, *h*, *e*, *g*, divisent le demi-diamètre *db* (c'est-à-dire en parties proportionelles); et que, par conséquent, les points H et *h*, qui sont les centres de gravité des secteurs, diviseront les demi-diamètres dans le même rapport.

Supposons, en second lieu, que l'angle des secteurs soit égal ou supérieur à deux droits. Soient (fig. 11) ABC, *abc*, les secteurs circulaire et elliptique donnés. Menons les diamètres BD, *bd*, de ces secteurs. Ils diviseront chacun des secteurs donnés en deux nouveaux secteurs, ABD, DBC ; *abd*, *dbc* ; dont les angles sont, tous, plus petits que deux droits.

Menons les diamètres, BE, BK ; *be*, *bk*, de ces secteurs ; et joignons EK, *ek*. On sait, par la théorie des coniques, dit della Faille, que les cordes EK, *ek*, sont divisées en parties égales, aux points L, *l*, où elles sont rencontrées par les diamètres BD, *bd*. De plus, comme les secteurs donnés sont proportionnels aux figures entières, il en sera de même de leurs moitiés. Soient donc H, I, les centres de gravité de ABD, DBC; ces points (prop. 20) sont sur BE, BK; soient encore *h*, *i*, les centres de gravité de *abd*, *dbc*; ces points, en vertu de la première partie de la proposition, sont sur *be*, *bk* ; de plus

$$\frac{eb}{hb} = \frac{\text{EH}}{\text{HB}} = \frac{\text{KI}}{\text{IB}} = \frac{ki}{ib}$$

donc, HI, et EK; *hi* et *ek* sont parallèles; les points G, *g*, où HI, *hi*, sont rencontrées par BD, *bd*, sont les milieux de ces parallèles; et l'on a

$$\frac{\text{LG}}{\text{GB}} = \frac{lg}{gb}$$

Mais, les secteurs ABD, DBC, étant égaux; *adb*, *dbc*, équivalents; G et *g* (1, 4) sont les centres de gravité des secteurs entiers ABC, *abc*.

On sait encore, par la théorie des coniques, dit della Faille, que

$$\frac{\text{DL}}{\text{LB}} = \frac{dl}{lb}$$

d'où on déduira enfin

$$\frac{\text{DG}}{\text{GB}} = \frac{dg}{gb}.$$

Voilà della Faille parvenu au bout de son travail. Reste à en tirer une dernière conclusion. L'auteur le fait sous la forme de quatre corollaires imprimés en grands caractères à la fin de sa brochure.

Corollaires : I. Étant trouvée la quadrature du cercle, les centres de gravité de tous les secteurs circulaires inférieurs ou supérieurs au demi-cercle seront donnés ; il en est de même des centres de gravité des demi-cercles, et des segments supérieurs ou inférieurs au demi-cercle ; à condition que le rapport de leur arc à la circonférence entière soit connu. Et cela doit se comprendre aussi des figures elliptiques qui leur correspondent.

II. Étant donné le centre de gravité d'une quelconque des parties précédentes ; leur quadrature est par là même trouvée ; car, on donne ainsi trois droites telles qu'en en prenant la quatrième proportionnelle, on obtient une ligne égale soit à l'arc entier, soit au demi-arc de la figure proposée. Cette dépendance entre la quadrature du cercle et le centre de gravité de ses parties, découverte par nous, ouvre une voie nouvelle à la recherche de la quadrature du cercle ; à savoir, en cherchant à déterminer le centre de gravité sans le faire dépendre de la quadrature.

III. Toutes les lunules formées par deux portions quelconques de circonférences ; de même, toutes les parties comprises entre deux droites parallèles ou non ; ainsi que les « Arbella », les « Scalpra » ou les « Securiculae » (1), enfin toutes les autres figures

(1) Ces trois figures sont composées de droites et d'arcs de circonférences ou d'ellipses. L'Arbelon est défini par Archimède (*Lemmes ;* prop. 4). C'est la figure très connue formée par une demi-circonférence et deux autres demi-circonfé-

composées soit d'arcs de cercles, soit de combinaisons d'arcs de cercles et de lignes droites, ont leurs centres de gravité donnés ; car, en menant les cordes des arcs, toutes ces figures se décomposent en segments circulaires et figures rectilignes. La même chose a lieu pour les figures elliptiques.

IV. Enfin, tout cela peut servir à déterminer les centres de gravité jusqu'ici inconnus de certains corps. En effet, les centres de gravité des parties de cylindres (1) comprises entre des bases opposées parallèles choisies parmi les dites figures, sont donnés. Il en est de même des parties de cônes (2) comprises entre le sommet et une base choisie parmi les dites figures circulaires ou elliptiques. En effet, dans les cylindres l'axe de gravité est donné par la droite qui joint les centres de gravité des bases parallèles opposées ; dans les cônes par la droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base ; le centre de gravité des parties de cylindres est au milieu de leur axe de gravité ; celui des parties de cônes, au quart à partir de la base. Cela est prouvé par les démonstrations de Frédéric Commandino et de Luc Valerio relatives aux centres de gravité des solides.

VIII

A son apparition, la brochure de della Faille fit sensation. Quand Grégoire de Saint-Vincent en eut le manuscrit entre les mains, il en fut si satisfait, qu'il se chargea lui-même de l'impression. Dix-neuf ans plus tard, en 1651, le jeune Huygens parlait de l'auteur avec enthousiasme : « Acutissimus geometra della Faille. Tantus Vir », dit-il, dans la préface de ses *Theoremata de Quadratura Hyperboles, Ellipsis et Circuli*. « Le très subtil géomètre della Faille ! Un si grand homme ! »

Huygens force la note. Mais l'exagération juvénile de ses éloges

rences intérieures tangentes entre elles en un point quelconque du diamètre de la première circonférence et tangente à cette circonférence aux deux extrémités de ce diamètre. La forme du Scalprum et de la Sericula se devine par la traduction de ces noms : Lancette, Petite scie.

(1) Archimède donne le nom de parties de cylindres aux cylindres obliques.

(2) Les cônes obliques.

se comprend. Le problème de la quadrature du cercle était à l'ordre du jour. En donnant sa formule

$$d = \frac{2}{3} \mathrm{R} \frac{\text{corde A}}{\mathrm{A}},$$

en montrant que le problème de la quadrature et celui de la détermination des centres de gravité des secteurs et des segments étaient corrélatifs, della Faille semblait ouvrir des horizons nouveaux sur une question qui passionnait les géomètres. Illusion d'optique ! L'avenir devait l'apprendre. A ce point de vue, il reste de la brochure de della Faille une simple formule intéressante, demeurée sous une légère modification classique jusqu'à nos jours. Mais, avec quel art, quelle imperturbable logique, quelle plume élégante, l'a établie ce nouvel Archimède ! Les contemporains donnèrent à della Faille ce glorieux surnom. Le *De Centro Gravitatis* d'après eux faisait bonne figure à côté des deux *Livres sur l'Équilibre des plans*. Contentons-nous de dire que della Faille s'inspire avec beaucoup de bonheur de ces immortels chefs-d'œuvre.

Ne pourrait-on pas parler cependant en termes tout aussi élogieux d'autres ouvrages analogues, du traité *De Centro Gravitatis* de Commandino, par exemple? Il ne semble pas. Sans doute, les deux géomètres ont l'un et l'autre cherché, avec succès, à imiter la méthode, voire même le style d'Archimède. Mais Commandino ne réussit qu'à écrire un ingénieux pastiche, simple reconstitution d'un ouvrage perdu; della Faille, au contraire, est, on l'a vu, très original. Qu'on se rappelle, notamment, les propositions 9, 10 et 32.

Comment arriva-t-il à des conceptions aussi neuves ? Par l'analyse ; mais, une analyse dont il ne nous a malheureusement pas livré le secret. Écoutons le dans l' « Avis au Lecteur » :

« Mathematicam multi sciunt, Mathesim pauci », dit-il. « Beaucoup savent les mathématiques ; peu savent la mathèse ». Je traduirais librement : En mathématiques beaucoup savent faire une synthèse ; peu possèdent l'analyse. Della Faille va s'expliquer.

« Autre chose est, d'après lui, de connaître quelques propositions, et d'en énoncer l'une ou l'autre facile, trouvée plutôt par

hasard, que par un procédé de recherches assuré : autre chose, d'apercevoir la nature et l'essence même de la science, d'en pénétrer les profondeurs, de disposer des préceptes généraux, par lesquels on imagine beaucoup de théorèmes et de problèmes ainsi que le moyen de les démontrer aisément. Le commun des peintres, à force de recopier les mêmes prototypes, arrive à une certaine habileté dans la peinture ; ils n'acquiert pas l'art de peindre, science que donne l'optique. La lecture d'Euclide et des ouvrages des autres géomètres suggére de même, par imitation, quelques propositions et quelques démonstrations ; mais, elle laisse complètement ignorer le secret de la méthode, qui fait trouver la démonstration des théorèmes et des problèmes, difficiles.

» Assurément, les anciens ont eu une analyse subtile. Pappus en parle excellemment, dans son livre VII (1) ; c'est par ce livre que nous connaissons quelques éléments de cet art et le résumé des ouvrages qui en traitaient. Des hommes très savants s'efforcent de les reconstituer. Quant à nous, nous donnerons au moment opportun les découvertes que nous avons faites en cette matière. »

En quoi consistait l'analyse de della Faille ? Nous n'en savons rien. Une mort prématurée empêcha l'auteur d'accomplir sa promesse.

Tout au plus, une lettre d'un des élèves de della Faille nous fournit-elle quelques détails sur le sujet ; encore sont-ils bien vagues. La méthode était si excellente, affirme don Andres Antonio de Anduga y Douza (2), qu'en un mois, il fit de tels progrès dans la géométrie, qu'il dépassait ses condisciples, qui avaient consacré à cette science douze et même vingt ans. Elle comprenait deux propositions générales et quatorze particulières.

Ces chiffres, il est vrai, importent médiocrement. Don Andres de Anduga nous eût intéressé davantage en nous apprenant en

(1) *Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt e libris manuscriptis edidit, latina interpretatione et commentariis instruxit Fredericus Hultsch.* Berolini, apud Weidmannos, 1877-78.

(2) L'autographe original espagnol est aux Archives générales du Royaume. Archives jésuitiques. Province Flandre-Belgique, liasse 1477. Les parties les plus intéressantes ont été traduites dans la notice du P. Van der Speeten, pp. 18 et 19.

quoi consistait la méthode de son maître. Une seule chose en résulte clairement : comme Archimède, son modèle, della Faille trouvait ses théorèmes par une voie toute différente de celle qu'il suivait pour les démontrer. Della Faille était élève de Grégoire de Saint-Vincent. On peut supposer que son maître lui avait communiqué ses découvertes dans l'analyse infinitésimale.

Quant à la méthode d'exposition de della Faille, elle est exclusivement synthétique et a toutes les qualités, mais aussi tous les inconvénients de l'exposition synthétique. Voilà ce qui explique l'impression sous laquelle restèrent Montucla et Quetelet. Ils se contentèrent d'une première lecture et ne virent pas où l'auteur allait.

Or, j'en appelle à tous ceux qui ont quelque peu pratiqué le roi de l'exposition synthétique, Archimède : A une première lecture, on ne voit pas non plus où le Syracusain va. Si l'on cherchait uniquement, dans le premier livre de l'*Équilibre des plans*, les formules qui déterminent la position du centre de gravité du triangle ou du trapèze, il ne vaudrait pas la peine d'y revenir. Mais quand on reprend en mains cet incomparable chef-d'œuvre, tout y est si lumineusement exposé, tout est si logiquement enchaîné, qu'on se laisse entraîner à le relire, par le simple plaisir de relire un ouvrage bien écrit.

Pour ma part, je ne connais guère d'auteur, qui, tout en étant très original, rappelle aussi bien Archimède, que della Faille.

Si l'on se contente de chercher, dans son traité du *Centre de gravité*, la formule

$$d = \frac{2}{3} \mathrm{R} \frac{\text{corde A}}{\text{A}},$$

della Faille mérite quelques lignes dans l'histoire des mathématiques ; rien de plus.

Mais pour établir cette formule l'auteur a écrit un vrai petit modèle de logique. C'est l'admiration de Christiaan Huygens pour cette brochure, qui m'a conduit à la relire, d'abord ; à l'étudier, ensuite.

Puisse mon travail d'aujourd'hui contribuer à la tirer de l'oubli !

APPENDICE

LE PREMIER LIVRE DE L'ÉQUILIBRE DES PLANS PAR ARCHIMÈDE [1]

Postulats

1. Deux poids égaux suspendus à des bras de levier égaux sont en équilibre. Deux poids égaux suspendus à des bras de levier inégaux ne sont pas en équilibre et celui qui est suspendu au plus long bras de levier l'emporte.

2. Étant donnés deux poids suspendus en équilibre à deux bras de levier, tout poids ajouté à l'un des deux rompt l'équilibre et le poids auquel un autre a été ajouté l'emporte.

3. De même, si on enlève un poids des deux poids en équilibre, l'équilibre est rompu et le poids auquel on n'a rien enlevé l'emporte.

4. Si on fait coïncider deux figures planes et égales, leurs centres de gravité coïncideront.

5. Les centres de gravité de deux figures planes semblables occupent des points homologues. Les points homologues sont ceux qui, étant joints aux côtés de la figure qui se correspondent, forment des angles égaux avec ces côtés.

6. Étant données deux grandeurs suspendues en équilibre à des bras de levier, l'équilibre n'est pas rompu si on remplace les premières grandeurs par d'autres qui leur sont égales.

7. Le centre de gravité d'une figure, dont le périmètre est entièrement concave, se trouve à l'intérieur de la figure.

Théorèmes

1. Si deux poids suspendus à des bras de levier égaux sont en équilibre, ces deux poids sont égaux.

2. Deux poids inégaux suspendus à des bras de levier égaux ne sont pas en équilibre, mais le poids le plus lourd l'emporte.

3. Étant donnés deux poids inégaux suspendus en équilibre à des bras de levier inégaux, le poids le plus lourd est suspendu au plus petit bras de levier.

4. Si deux grandeurs égales ont des centres de gravité différents, le centre de gravité de l'ensemble est au milieu de la droite qui joint les centres de gravité des deux premières.

5. Si trois grandeurs égales et équidistantes en équilibre ont leurs centres

(1) Le but que nous avons en vue en reproduisant ici ces énoncés, nous engage à en moderniser un peu les expressions.

de gravité en ligne droite, le centre de gravité de l'ensemble coïncide avec celui de la grandeur du milieu.

Cor. I. Étant données des grandeurs en nombre impair, égales, équidistantes en équilibre, et ayant, toutes, leurs centres de gravité en ligne droite, le centre de gravité de l'ensemble coïncide avec celui de la grandeur du milieu.

Cor. II. Si le nombre des grandeurs données est pair, le centre de gravité de l'ensemble est au milieu de la droite qui joint les centres de gravité extrêmes.

6. Deux grandeurs commensurables suspendues en équilibre à des bras de levier, sont inversement proportionnelles à leurs bras de levier.

7. Il en est de même quand les grandeurs sont incommensurables.

8. Si d'un tout on enlève une partie qui n'a pas le même centre de gravité que le tout, le centre de gravité de la partie restante est sur la ligne qui joint le centre de gravité de la partie enlevée à celui du tout, prolongée au delà de ce dernier, et les deux parties sont inversement proportionnelles à leurs bras de levier.

9. Le centre de gravité d'un parallélogramme est au milieu de la droite qui joint les milieux des côtés parallèles.

10. Il est aussi au point de concours des diagonales.

11. Étant donnés deux triangles semblables et deux de leurs points homologues, si le premier point est le centre de gravité du premier triangle, le point homologue sera le centre de gravité du second.

12. Étant donnés deux triangles semblables, si le centre de gravité du premier est sur une médiane, le centre de gravité du second est sur la médiane homologue.

13. Dans un triangle, le centre de gravité est sur la médiane.

14. Il est au point de concours des médianes.

15. Dans un trapèze, le centre de gravité est sur la droite qui joint les milieux des bases parallèles b et B, et divise cette droite en deux segments s et S (s adjacent à b ; S à B) tels que

$$\frac{s}{S} = \frac{2\,B + b}{2\,b + B}.$$