Ann. Soc. Scient. Brux. (31), 1907

taire et l'exposé analytique inverse constituent un système de géométrie à la fois inattaquable au point de vue de la rigueur et traduisant de trois manières, *pratiquement équivalentes*, les phénomènes de la géométrie physique.

Riemann, Helmholtz, Lie et d'autres, après eux, ont essayé de pénétrer plus profondément dans l'étude des premiers principes de la géométrie par une voie purement analytique, sans recourir aucunement à la méthode élémentaire d'Euclide. Au dire des connaisseurs, Riemannn et Helmholtz ont esquissé et Lie a trouvé complètement la solution d'un problème d'analyse qui, pour d'éminents mathématiciens, se confond avec l'établissement des principes fondamentaux de la science de l'espace. Cependant, il faut bien le reconnaître, ni Lie, ni ses devanciers, n'ont donné une signification *géométrique* proprement dite aux coordonnées des êtres analytiques qu'ils appellent points, ou aux paramètres qui entrent dans les formules de transformation employées. Par suite, les recherches dont nous venons de parler ne semblent avoir de géométrique que la terminologie.

Il en est autrement d'un travail que M. F.-H. Blichfeldt a publié, il y a quelques années, sous le titre : *On the Determination of the Distances between two Points in Space of n Dimensions* (TRANSACTIONS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, octobre 1902, vol. 3, n° 4, pp. 467-481) et qui est écrit à la fois dans le sens des recherches de Lie et de celles de De Tilly. Pour M. Blichfeldt, les coordonnées d'un point dans un espace à trois dimensions, par exemple, sont les distances de ce point à trois points fixes de cet espace ou des fonctions de ces distances, ce qui donne immédiatement un sens géométrique à tous ses résultats. Moyennant un certain nombre de définitions et d'axiomes dont le plus caractéristique est le suivant : *la distance de deux points est une fonction algébrique de leurs coordonnées*, et en s'aidant des recherches de Lie, M. Blichfeldt détermine la distance de deux points en fonction de leurs coordonnées, dans les espaces à 1, 2, 3, 4 dimensions. Il retrouve ainsi l'expression de la distance dans l'espace euclidien et dans l'espace non euclidien à trois dimensions, *puis quatre autres expressions analogues et quatre systèmes de géométrie correspondants*, auxquels Lie était aussi arrivé sous forme purement analytique.

D'après les formules mêmes qui donnent les distances dans ces espaces nouveaux, *ces espaces ne sont pas homogènes et deux d'entre eux jouissent d'autres propriétés singulières quand deux points tendent l'un vers l'autre*. Par suite, ils ne semblent pas devoir entrer en ligne de compte quand on étudie la géométrie physique.

Le R. P. Bosmans, S. J., analyse *une note historique sur le triangle arithmétique de Pascal* dont voici le texte :

Les erreurs commises à propos des noms propres attribués à certains théorèmes ne se comptent plus. Mais l'une des plus courantes et des moins justifiées est bien celle qui consiste à baptiser le triangle arithmétique des coefficients du binôme du nom de triangle de Pascal. Je l'ai déjà signalée, en passant, dans un autre mémoire (*) et je n'y reviendrais pas aujourd'hui si M. Cantor lui-même ne parlait pas sur le sujet d'une manière équivoque (**). D'après l'éminent historien des mathématiques, le triangle arithmétique serait bien, il est vrai, imaginé par Stifel (***), mais la disposition donnée par Pascal (IV) à son triangle différerait trop de celle

---

(*) *Le Fragment du Commentaire d'Adrien Romain sur l'Algèbre de Muhamed ben Musa el-Chowârezmî.* ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE. Bruxelles, 1906, t. 30, p. 20, en note.

(**) *Vorlesungen ueber Geschichte der Mathematik*, 2e éd. Leipzig, Teubner, 1900, p. 750.

Il convient de citer la conclusion du passage. Après avoir décrit les différences caractéristiques des triangles de Stifel et de Pascal, M. Cantor s'énonce comme suit : « Es wäre also in höchsten Grade ungerecht, eine Abhängigkeit Pascal's von Stifel zu vermuthen. Selbst wenn Pascal die Arithmetica integra gekannt hat, was wir noch sehr bezweifeln, war das arithmetische Dreieck durchaus sein geistiges Eigenthum. »

Oui, mais comme nous le dirons tantôt, il n'y avait pas que l'*Arithmetica integra*, pour faire connaître à Pascal le triangle de Stifel. Ne pouvait-il pas l'avoir lu, par exemple dans une des nombreuses éditions de l'*Arithmetique* de Jacques Peletier du Mans; petit traité qui fut si répandu en France et qui y jouit d'une vogue si méritée ?

(***) *Arithmetica Integra Authore Michaele Stifelio. Cum praefatione Philippi Melanchthonis.* Norimbergæ apud Iohan. Petreium. Anno Christi M.D.XLIIII, Cum gratia & priuilegio Cæfareo atq; Regio ad Sexennium (Univ. de Louvain, Scienc. 244), f° 44 v°.

(IV) *Traité Dv Triangle Arithmetiqve, Avec Qvelqves Avtres Petits Traitez Svr La Mesme Matiere. Par Monsieur Pascal.* A Paris, Chez Gvillavme Desprez, du triangle de Stifel, pour ne pas regarder cette deuxième disposition comme absolument distincte de la première.

Si cette remarque de M. Cantor était fondée, le nom de triangle de Pascal serait évidemment justifié. Mais il n'en est rien, car malgré sa compétence hors pair et son autorité, l'illustre professeur d'Heidelberg pose mal, semble-t-il, le problème.

En effet, de Stifel à Pascal, le triangle arithmétique se rencontre fréquemment dans les traités d'arithmétique et d'algèbre, où les auteurs lui donnent à l'envi les formes les plus diverses.

Voilà un fait important, dont il faut tenir compte. Sans doute, ce fait ne peut guère avoir échappé à l'érudition de Cantor, mais le savant historien paraît cependant le perdre ici un peu trop de vue. Ce n'est pas au seul triangle de Stifel qu'il convient de comparer le triangle de Pascal. De l'*Arithmetica Integra* au *Traité du Triangle Arithmétique* il s'écoule cent vingt et un ans, plus d'un siècle. Or, si l'on tient compte des modifications subies dans l'intervalle par le triangle arithmétique, il serait bien difficile d'indiquer en quel détail un peu notable la forme de Pascal diffère de celle de ses prédécesseurs.

Pour le faire voir commençons par mettre sous les yeux du lecteur les deux formes extrêmes en discussion, les triangles de Stifel et de Pascal.

Le triangle de Stifel est parfois reproduit sans modifications, par les arithméticiens du XVI^e siècle, sous cette première forme. C'est sous celle-là, qu'on le lit, entre autres, dans l'*Arithmétique* (*) de Jacques Peletier du Mans.

---

ruë Saint Iacques, à Saint Prosper. M.DC.LXV. (Bibl. Royale de Belgique V. H. 8135). C'est l'édition originale qui est très rare. Le triangle y est donné sur une planche hors texte.

Dans les rééditions on a, avec raison, abandonné cette disposition. Ainsi dans les *Œuvres complètes de Blaise Pascal*, t. 3, Paris, Hachette, 1864, le triangle se trouve p. 244.

(*) *L'Aritmetiqve de Iaqves Peletier dv Mans, Departie en quatre liures, Troisieme edition, reueuë & augmentee.* Par Iean De Tovrnes. M.DC.VII. A Cologni (Univ. de Louvain, Scienc. 570), p. 178.

Je n'ai que cette seule édition sous la main, mais il y en a plusieurs autres, notamment : Poitiers, 1548, 1549 et 1552; Lyon, 1554 et 1570.

Triangle de Stifel

1							
2							
3	3						
4	6						
5	10	10					
6	15	20					
7	21	35	35				
8	28	56	70				
9	36	84	126	126			
10	45	120	210	252			
11	55	165	330	462	462		
12	66	220	495	792	924		
13	78	286	715	1287	1716	1716	
14	91	364	1001	2002	3003	3432	
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310

Triangle de Pascal

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

Je dis intentionnellement : « reproduit sous cette *première* forme ». Car neuf ans plus tard, en 1553, dans son édition de la *Coss* de Christophe Rudolff de Jauer (*), Stifel lui-même en adopte une autre se rapprochant déjà beaucoup de celle de Pascal.

Triangle de la Coss de Christophe Rudolff de Jauer

x^2	2	1					
x^3	3	3	1				
x^4	4	6	4	1			
x^5	5	10	10	5	1		
x^6	6	15	20	15	6	1	
x^7	7	21	35	35	21	7	1

Cette nouvelle forme a ses partisans, comme la première et semble plaire notamment à certains géomètres des Pays-Bas. Il est d'ailleurs remarquable que si de nombreux géomètres antérieurs à Pascal ont employé le triangle arithmétique, aucun d'eux ne semble attacher la moindre importance aux diverses dispositions qu'il affecte. Quoi qu'il en soit c'est sous la forme de la *Coss* de Christophe Rudolff que nous rencontrons le triangle, par exemple dans les éditions de la *Practicque om te leeren*

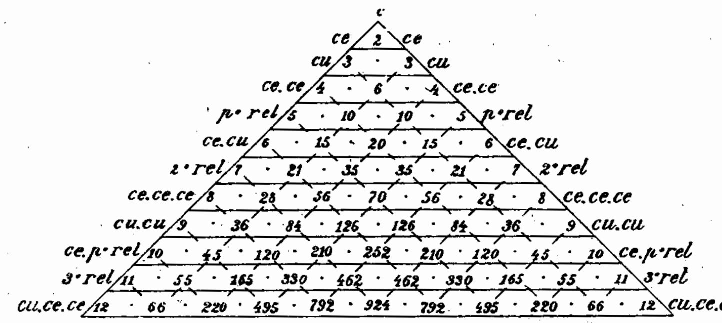
(*) Je n'ai pas le volume à ma disposition. J'en transcris le titre, d'après Terquem : *Christophe Rudolf.* BULLETIN DE BIBLIOGRAPHIE D'HISTOIRE ET DE BIOGRAPHIE MATHÉMATIQUES, t. 1, Paris, 1835, p. 71. *Die cosz Christorfs Rudolfs mit schönen Exemplen der cosz, durch Michael Stiffel, gebessert und sehr gemehrt, 1571.* Le titre porte 1571 ; mais à la fin de l'ouvrage on lit : « Gedruckt zu Königsperg in Preussen, durch Alexandrum Behm von Luthomissel ; vollendet am dritten Tag des herbstmonnats als man zalt nach der geburt Unsers Lieben Herren Jesu Christi 1554 ». L'ouvrage existe au British Museum.

Le tableau que je reproduis ici est emprunté aux *Vorlesungen* de Cantor, t. 2, p. 445. On le trouve également dans : *Die deutsche Coss. von P. Treutlein, Professor am Gymnasium zu Karlsruhe.* ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK, t. 2. Leipzig, 1879, p. 43. Pour éviter les embarras typographiques, j'y ai remplacé, dans la première colonne, les signes cossiques anciens par la notation moderne équivalente.

Cypheren, de Nicolas Peetersen de Deventer (*), ouvrage qui fut longtemps le manuel classique d'arithmétique et d'algèbre dans les écoles des Pays-Bas (**).

Passons au *General Trattato di Numeri et Misure* de Tartaglia (***) qui parut à Venise de 1556 à 1560. Le triangle y affecte la forme suivante :

Triangle de Tartaglia



(*) *Practicqve Om te Leeren Rekenen Cypheren ende Boeckhouwen | met die Regel Coss | ende Geometrie seer profytelijcken voor allen Coopluyden. Van nieus Ghecorrigeert ende vermeerdert | Deur Nicolaum Petri Dauentriensem* (Beau portrait de l'auteur, avec la devise : « L'homme propose et Dieu dispose A° 1583 ».) Anno M. D. XCI.— A la dernière page : t'Amstelredam, By Barendt Adriaensz. Wonende inde Waermoestraet | Int Gulden Schrijff-boeck. A° M. D. XCI. Ende men vintse te coop by Claes Pietersz. Schoolmeester | wonende op de Oude-Zijdts Burch-wal | Int Gulden Claver-blat (Univ. de Louvain. Sciences 293); f° 130 v°.

Même titre : t'Amsterdam | by Cornelis Claesz. opt Water int Schrijf-boeck. Anno 1605 (Univ. de Louvain, Sciences 573); f° 130 v°.

Même titre t'Amstelredam, Door Hendrick Laurentsz. Boeckvercooper op het water int Schrijf-boeck. Anno 1635 (Univ. de Louvain, Sciences 574); f° 135 v°.

La première édition est de 1583. Je ne l'ai pas vue.

(**) « Nicolaus Peetersen, dit Adrien Romain, arithmeticae etiam secretioris algebraïcae peritissimus, cujus Arithmetica Belgica lingua conscripta *omnium teritur manibus,* discipulosque e suâ scholâ emittit doctissimos ». *Ideae Mathematicae pars prima, sive Methodvs Polygonorvm... Authore Adriano Romano Lovaniensi Medico et Mathematico.* Lovanii, Apud Ioannem Masium. Typogr. Iur. Anno ch. CIↃ. IↃ. XCIII. Dans l'avis au lecteurs, f° ** v°.

(***) *La seconda Parte Del General Trattato Di Nvmeri Et Misvre Di*

Faites tourner le triangle de Tartaglia d'un angle de 45 degrés de manière à rendre la suite des nombres naturels horizontale en ramenant le chiffre 2 au coin supérieur de gauche; remplacez-y les signes cossiques par l'unité, vous aurez le triangle de Pascal.

Cette forme eut autant de vogue que celles de Stifel. On la rencontre, par exemple, dans la *Regula Cos of Algebra* de Brasser (*).

Chez Albert Girard (**) et chez Stevin (***) elle subit de légers changements.

Triangle d'Albert Girard

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Triangle de Stévin

20
3 . 30
4 . 6 . 40
5 . 10 . 10 . 50
6 . 15 . 20 . 15 . 60

Nicolo Tartaglia, Nellaqvale In Vndeci Libri Si Notifica La Piv Elevata, Et Speculativa Parte Della Pratica Arithmetica, laqual è tutte le regole & operationi praticali delle progressioni, radici, proportioni, & quantita irrationali. In Venegia per Curtio Troiano dei Nauò. M. D. LVI. (Univ. de Louvain, Sciences 153); f° 69 v°.

La figure de Tartaglia a été reproduite avec exactitude dans l'*Histoire des Sciences Mathématiques en Italie depuis la Renaissance jusqu'à la fin du XVII[e] siècle*, par Guillaume Libri. Paris, Jules Renouard et C[ie], t. 3, p. 362.

Les signes cossiques placés aux deux côtés du triangle, sont ceux des douze premières puissances de l'inconnue.

(*) *Regula Cos, Of Algebra, Zijnde de alder-konstrijcken Regel om het ombekende bekent te maken. Ofte Een Korte Onderwijsinge | waer in geleert werdt het Uyttrecken der Wortelen | soo verre men begeeren mach. De spetien in Surdische getallen, Twee-namige getallen, Cossische getallen. De vergelijckingen van φ, z, ζ, etc. met Exempelen daer toe dienende. Door J. R. Brasser, geadmitteert Lantmeeter tot Hoorn. Noch Is hier by ghevoeght de Geometria van Nicolaus Petri Daventriensis, ende andere Questien van de Algebrae. Als mede Eenige Exempelen van Gerrit Evertsz. Backer, School-meester tot Gracht.* 't Amsterdam, By Gerrit van Goedesbergh, Boeckverkooper op 't Water | aen de Nieuwebrugh | in de Delfsche Bybel. Anno 1663 (Bibl. Royale de Belgique, V. H. 8068), pp. 2 et 3.

(**) *Invention nouvelle en l'algebre par Albert Girard Mathematicien...* A Amsterdam. Chez Guillaume Iansson Blaeuw M. DC. XXIX. Réimpression fac-similé par D. Bierens de Haan. Leyde, 1884; f. (E_4) r°.

(***) *L'Arithmétique De Simon Stevin de Bruges...* A Leyde, De l'Imprimerie

On pourrait signaler encore d'autres modifications plus importantes. Voici entre autres la disposition adoptée par Adrien Romain (*).

Triangle d'Adrien Romain

(1)	(2)	(3)	(4)	
1	1	1	1	
1	2	3	4	
	1	3	6	&c.
		1	4	
			1	

Mais je crois en avoir dit assez pour conclure.

On voit tout d'abord, rien que par ces quelques exemples, combien l'emploi du triangle arithmétique est fréquent antérieurement à Pascal. On remarque aussi avec quelle rapidité la forme primitive adoptée par Stifel se modifie, pour se rapprocher peu à peu de celle du géomètre français.

Appeler triangle de Pascal une figure d'un usage antérieur aussi prolongé, aussi universel, est une coutume que rien ne justifie.

Il faudrait une bonne fois en perdre l'habitude.

Le vrai nom du triangle arithmétique est : *Triangle de Stifel*.

Que si on partageait l'avis de M. Cantor, en estimant la forme de Pascal trop différente de celle de Stifel pour ne pas la regarder comme distincte de celle-ci, encore faudrait-il nommer le triangle arithmétique *Triangle de Tartaglia*.

---

de Christophle Plantin. CIↃ. IↃ. LXXXV. p. 106. *Les Œuvres Mathématiques de Simon Stevin de Bruges...* A Leyde, Chez Bonaventure & Abraham Elzevier... CIↃ IↃCXXXIV, t. I, p. 25.

(*) *In Mahumedis Algebram* (Univ. de Louvain, Sciences 1302), p. 68. Voir sur cet ouvrage mon mémoire cité ci-dessus.

Les signes (1), (2), (3), (4) signifient respectivement x, x^2, x^3, x^4.

La conséquence à tirer de ce qui précède, n'est cependant pas que la formule du développement du binôme ne doive rien à Pascal. Mais, Paul Tannery l'a jadis fort bien démontré (*), le mérite du géomètre français est ailleurs.

Désignons par C_n^m le coefficient du terme de rang $n+1$ dans la formule du développement du binôme

$$(a+b)^m.$$

Le Triangle arithmétique est construit par la formule de récurrence

$$C_n^m = C_n^{m-1} + C_{n-1}^{m-1}.$$

C'est le stade atteint dès Stifel et Tartaglia et on s'y arrête pendant plus d'un siècle. Fermat et Pascal font parcourir à la formule du binôme un stade nouveau en trouvant entre les coefficients la relation,

$$C_n^m = \frac{m-n+1}{n} C_{n-1}^m.$$

Cependant, comme l'observe avec raison Paul Tannery, ce n'est pas dans le *Traité du Triangle Arithmétique*, mais dans celui des *Ordres numériques* (**) que Pascal donne cette dernière formule. Quant à Newton, dans la célèbre lettre à Oldenbourg, du 24 octobre 1676 (***), il ne parle pas, on se le rappelle, du cas de l'exposant entier et positif, et n'y traite que le développement en série convergente par la formule du binôme.

(*) Réponse à la *Question 615* de l'INTERMÉDIAIRE DES MATHÉMATICIENS, t. 3, Paris, 1896, p. 98.

(**) Publié pour la première fois à la suite du *Traité du Triangle Arithmétique* cité ci-dessus. Pour plus de détails voir la réponse de Paul Tannery à la *Question 615* de l'INTERMÉDIAIRE DES MATHÉMATICIENS, t. 3, p. 98 qui contient un excellent résumé de l'histoire de la formule du binôme de Newton.

(***) *Isaaci Newtoni Equitis Aurati Opuscula... Collegit... Joh. Castillioneus.* T. I. Lausannae & Genevae Apud Marcum-Michaelem Bousquet & socios MDCCXLIV, pp. 328 sq.

M. Ch.-J. de la Vallée Poussin fait la communication suivante *Sur le mouvement instantané le plus général d'un solide.*

1. Dans la plupart des traités de mécanique, pour établir le théorème de Chasles sur le mouvement hélicoïdal d'un solide, on se sert de calculs analytiques assez longs, ou de la considération de divers mouvements simultanés, souvent des deux à la fois. De Tilly (MATHESIS, t. V, 1885) a donné du théorème une démonstration directe, mais qui repose sur un passage à la limite dont la simplicité est contestable.

Je crois donc intéressant de donner du théorème une démonstration qui n'emprunte que le minimum possible de notions infinitésimales et qui, en se réduisant pour ainsi dire à la seule géométrie, est en même temps la plus simple.

2. Un solide est un ensemble de points dont les distances ne varient pas. Soient A et B deux points d'un solide de coordonnées x, y, z, et x', y', z'; cette propriété primordiale s'exprime par la relation analytique

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 = \text{const.}$$

Soient v et v' les vitesses des deux points A et B; il existe entre les vitesses de ces deux points une relation, qui s'obtient en dérivant la précédente,

$$(x-x')(v_x - v'_x) + (y-y')(v_y - v'_y) + (z-z')(v_z - v'_z) = 0.$$

Cette relation exprime que *la différence géométrique* $(v)-(v')$ *des vitesses des deux points* A *et* B *est normale à la droite* AB.

Ce théorème sur les vitesses apparaît comme le plus élémentaire et le plus simple. C'est le seul dont je veuille me servir pour étudier le mouvement du solide. Je l'appellerai le *lemme fondamental.*

Le lemme fondamental revient à dire que les projections des vitesses de deux points A et B d'un solide sur la droite AB sont égales. On en conclut que *la projection sur une droite de la vitesse d'un de ses points est une constante pour chaque droite.* Cette constante nous l'appellerons, en abrégé, *la projection de la vitesse sur la droite.*