 Mathesis, 37, 1923

3. *De l'orthocentre* H *d'un tétraèdre orthocentrique on mène des normales aux droites projetant d'un point quelconque* P *les sommets* A, B, C, D ; *ces normales coupent respectivement les faces opposées en quatre points* A′, B′, C′, D′ *d'un plan perpendiculaire à* PH (V. Thébault, M, 1923-400, question 2185). (*)

Le plan polaire du point A′ relativement à la sphère (H) conjuguée au tétraèdre ABCD passe par le sommet A et est normal au rayon A′H. Ce plan contient donc le point choisi P et les quatre points A′, B′, C′, D′ sont dans le plan polaire de P relativement à la sphère (H).

4. Dans l'inversion relative à la sphère (H), à la sphère (ABCD) correspond la sphère passant par les pieds des hauteurs : H_a, H_b, H_c, H_d ; à la droite PA correspond le cercle HH_aA'. Si le point choisi P est le centre de la sphère (ABCD), le rayon PA coupe orthogonalement cette sphère et en appliquant la conservation des angles par inversion, on conclut que la tangente en H_a au cercle HH_aA' est la normale en H_a à la sphère ($H_aH_bH_cH_d$). Donc

Si H_a, H_b, H_c, H_d *sont les pieds des hauteurs d'un tétraèdre orthocentrique* ABCD, *les plans tangents en ces points à la sphère* ($H_aH_bH_cH_d$) *passent respectivement par les milieux des segments* HA′, HB′, HC′, HD′ (**3**) *si le point choisi* P *est le centre de la sphère* (ABCD).

5. *Un plan* π *rencontre les faces d'un tétraèdre orthocentrique* ABCD *suivant les droites* p_a, p_b, p_c, p_d ; *les projections orthogonales de l'orthocentre* H *sur ces droites sont coplanaires.*

Car si P est le pôle du plan π relativement à la sphère conjuguée (H), les droites p_a et AP sont conjuguées à cette sphère et la perpendiculaire abaissée de H sur p_a coupe orthogonalement AP ; donc (**3**) la propriété est démontrée.

6. *Si* d *est une droite quelconque, les perpendiculaires abaissées de l'orthocentre* H *du tétraèdre* ABCD *sur les plans* dA, dB, dC, dD *rencontrent les faces opposées en quatre points* A′, B′, C′, D′ *collinéaires.*

Car le plan dA est le plan polaire de A′ relativement à la sphère (H) et la conjuguée d' de d par rapport à cette sphère passe par A′ et ses analogues B′, C′, D′.

(*) D'autres solutions de cette question seront publiées ultérieurement.
(Rédaction)

PASCAL ET SON TRAITÉ DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE (*),

par M. H. Bosmans S. J.

Aussi bien en mathématiques qu'en philosophie, Pascal est avant tout un écrivain, et à ce titre, il est un modèle, sinon à imiter, du moins à lire. Mais, par suite de notre éducation et de nos habitudes, nous comprenons souvent mal les énoncés des théorèmes sur les nombres, quand ils ne sont pas exprimés sous une forme algébrique. Nous en suivons plus difficilement encore les démonstrations, quand elles sont développées au long en langage courant. Or, Pascal, à tort selon nous, dédaigna toujours l'algèbre. C'est une traduction algébrique sommaire du *Traité du triangle arithmétique* que je me propose de donner ici. Je voudrais engager, par là, le lecteur à prendre connaissance du texte original, d'ailleurs fort court, mais qui est un petit chef d'œuvre d'ordonnance et de perfection du détail.

Pascal naquit à Clermont en Auvergne, le 19 juin 1623. De toute part, les Sociétés savantes françaises ont célébré à l'envi le troisième centenaire de la naissance de l'illustre écrivain-géomètre. L'occasion m'a paru toute indiquée pour présenter le 25 octobre dernier, à la Société Scientifique de Bruxelles, un mémoire *Sur l'Œuvre mathématique de* Pascal, qui paraîtra dans les livraisons de janvier et d'avril 1924 de la *Revue des Questions Scientifiques*. J'y renvoie le lecteur pour tous les renseignements, historiques ou autres, étrangers au but spécial que je me propose ici.

(*) *Traité du Triangle arithmétique, avec quelques autres petits Traitez sur les mesmes matières. Par Monsieur* Pascal. A Paris, chez Guillaume Desprez, ruë Saint Jacques, à Saint Prosper, MDCLXV.

L'édition originale est fort rare. La Bibliothèque Royale de Belgique en possède un exemplaire.

L'opuscule porte au titre la date de 1665, mais il était achevé dès 1654. Il se compose de divers petits mémoires trouvés à la mort de Pascal, tout imprimés dans les papiers du défunt. Le plus important de ces mémoires a donné son nom à l'ensemble. Je renvoie pour plus de détails au travail que j'ai donné à la Société Scientifique, en me contentant de rappeler que le Triangle arithmétique, loin d'être dû à Pascal, était alors d'un usage universel. Ce qui est personnel au Clermontois, ce sont les nouvelles applications qu'il en fait, et ses procédés de démonstration et de calcul à l'aide du Triangle.

Considérons le tableau suivant à double indice :

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \cdot & \cdot & a_{q-1}^1 & a_q^1 & a_{q+1}^1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{q+p-1}^1 \\
a_1^2 & a_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
a_1^3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\
a_1^{p-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_q^{p-1} & a_{q+1}^{p+1} & & & & \\
a_1^p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{q-1}^p & a_q^p & & & & & \\
a_1^{p+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{q-1}^{p+1} & & & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & & & \\
a_1^{p+q-1} & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

C'est le Triangle arithmétique tel que le conçoit Pascal, à cette différence près, que les nombres y sont inscrits dans de petits carrés, qu'il nomme *cellules*. De plus, Pascal représente les nombres par de simples lettres ; mais la notation à double indice a l'avantage de rappeler à chaque instant, au cours du raisonnement, la position que les nombres occupent dans le Triangle.

Pascal distingue, dans ce tableau, quatre espèces de rangées :

Les *Cellules d'un même rang parallèle*, c'est-à-dire, les lignes horizontales,

Les *Cellules d'un même rang perpendiculaire*, c'est-à-dire, les colonnes verticales.

Les *Bases*, c'est-à-dire, les cellules $a_1^p \dots a_p^1$ dont les diagonales consécutives forment, avec les deux côtés de l'angle droit du Triangle, des hypoténuses de triangles rectangles isocèles.

Les *Cellules de la dividende*, c'est-à-dire, celles dont les diagonales consécutives forment la perpendiculaire $a_1^1 a_2^2 \dots a_n^n$ abaissée du sommet de l'angle droit sur les bases. Cette perpendiculaire elle-même se nomme la *Dividende*.

Enfin, dans une même base, deux cellules équidistantes des cellules extrêmes sont des *Cellules réciproques* ; et le mot exposant signifie simplement *numéro d'ordre*.

Le nombre a_1^1, écrit dans la Cellule qui occupe le sommet de l'angle droit, est le *Générateur* du Triangle. Ce nombre est arbitraire ; mais, conformément aux idées de son temps, Pascal ne l'entend que d'un nombre entier et positif. Ses démonstrations sont, cependant, générales comme on le verra, et n'exigent pas cette restriction.

Tous les autres nombres inscrits dans les cellules du Triangle se forment au moyen du Générateur d'après une loi unique, que nous exprimerons par (*)

$$a_q^p = a_{q-1}^p + a_q^{p-1}.$$

Pascal tire ensuite dix-neuf *Conséquences* de la loi fondamentale et termine par un problème. Je traduis les énoncés de ces conséquences en notations algébriques. J'y ajoute l'aperçu de la démonstration de Pascal.

C. I. $\quad a_1^1 = a_2^1 = \cdots = a_p^1 = \cdots ; \qquad a_1^1 = a_1^2 = \cdots = a_1^q = \cdots$

En effet, pour la première ligne ou la première colonne, a_{q-1}^p ou a_q^{p-1} est nul, dans la loi fondamentale.

C. II. $\quad a_q^p = a_1^{p-1} + a_2^{p-1} + \cdots + a_q^{p-1}.$

Se déduit de C. I par substitutions successives (**).

C. III. $\quad a_q^p = a_{q-1}^1 + a_{q-1}^2 + \cdots + a_{q-1}^p.$

Même démonstration.

(*) En langage courant « le nombre d'une cellule s'obtient en ajoutant le nombre de la cellule qui la précède à celui de la cellule qui la surmonte ».

(**) En recourant au texte de Pascal, on y remarque des pseudo-fractions, dont le numérateur et le dénominateur sont séparés, dans certaines éditions, par une parenthèse horizontale ; en d'autres, par un simple trait. Cette parenthèse, ou ce trait, sont un signe d'*égalité* entre le numérateur et le dénominateur de la pseudo-fraction.

Cette notation, propre à Pascal, n'a eu aucun succès.

C. IV. (*)
$$a_q^p - a_1^1 = a_{q-1}^{p-1} + a_{q-1}^{p-2} + \cdots + a_{q-1}^1$$
$$+ a_{q-2}^{p-1} + a_{q-2}^{p-2} + \cdots + a_{q-2}^1$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ a_1^{p-1} + a_1^{p-2} + \cdots + a_1^1.$$

En partant de C. III, on a

$$a_q^p = a_{q-1}^p + a_{q-1}^{p-1} + \cdots + a_{q-1}^1$$
$$a_{q-1}^p = a_{q-2}^p + a_{q-2}^{p-1} + \cdots + a_{q-2}^1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_2^p = a_1^p + a_1^{p-1} + \cdots + a_1^1$$

d'où, par substitutions successives, et remarquant que, d'après C. I, $a_1^p = a_1^1$, on a le théorème.

C. V.
$$a_q^p = a_p^q.$$

La proposition est vérifiée dans la deuxième base, car d'après C. I, $a_1^2 = a_1^1 = a_2^1$.

Si elle est vérifiée dans la $(p+q-2)^{ème}$ base, elle l'est nécessairement dans la $(p+q-1)^{ème}$.

Supposons, en effet, que l'on ait

$$a_{q-1}^p = a_p^{q-1} \qquad \text{et} \qquad a_q^{p-1} = a_{p-1}^q.$$

D'après la loi fondamentale

$$a_q^p = a_{q-1}^p + a_q^{p-1}\,; \qquad a_p^q = a_{p-1}^q + a_p^{q-1}.$$

(*) La démonstration de Pascal est générale ; mais, il ne donne l'énoncé général de la Conséquence que dans l'*Avertissement* qui la suit. Dans l'énoncé du début, il fait $a_1^1 = 1$.

Donc, $a_q^p = a_p^q$. (*)

C. VI.
$$a_1^p + a_2^p + \cdots + a_q^p = a_p^1 + a_p^2 + \cdots + a_p^q.$$

Se déduit de C, V.

C. VII.

$$a_1^q + a_2^{q-1} + \cdots + a_{q-1}^2 + a_q^1 = 2\,[a_1^{q-1} + a_2^{q-2} + \cdots + a_{q-2}^2 + a_{q-1}^1].$$

Posons pour abréger, ce que Pascal ne fait pas,

$$a_1^q + \cdots + a_q^1 = s_q \qquad \text{et} \qquad a_1^{q-1} + \cdots + a_{q-1}^1 = s_{q-1}.$$

D'après la loi fondamentale

$$a_2^{q-1} = a_1^{q-1} + a_2^{q-2}\,; \qquad a_3^{q-2} = a_2^{q-2} + a_3^{q-3}\,; \quad \ldots.$$
$$\ldots \quad a_{q-2}^3 = a_{q-3}^3 + a_{q-2}^2\,; \qquad a_{q-1}^2 = a_{q-2}^2 + a_{q-1}^1.$$

Additionnant membre à membre

$$s_q - (a_q^1 + a_1^q) = a_1^{q-1} + 2a_2^{q-2} + 2a_3^{q-3} + \cdots + 2a_{q-2}^2 + a_{q-1}^1.$$

Mais, à cause de C. I,

$$a_q^1 = a_1^q = a_1^{q-1} = a_{q-1}^1.$$

Donc $s_q = 2s_{q-1}$.

C. VIII.
$$s_q = 2^{q-1}a_1^1. \ (**)$$

Se déduit de C. VII.

(*) Ce raisonnement mérite toute l'attention. Les démonstrations par induction complète étaient couramment employées par les Grecs. Mais, c'est Pascal, qui donna à l'induction la forme *par récurrence* telle que nous la pratiquons aujourd'hui.

Voir, pour plus de détails, mon mémoire présenté à la Société Scientifique, cité ci-dessus.

(**) Dans les énoncés de C. VIII et C. IX Pascal suppose $a_1^1 = 1$; il les généralise dans les *Avertissements*.

C. IX. $s_q = s_{q+1} + s_{q-2} + \cdots + s_1 + a_1^1.$

Se déduit de C. VII.

C. X.

$$a_1^q + a_2^{q-1} + \cdots + a_p^{q-p+1} = 2\,[a_1^{q-1} + a_2^{q-2} + \cdots + a_p^{q-p}] - a_p^{q-p}.$$

En effet $a_1^q = a_1^{q-1}$; $a_2^{q-1} = a_1^{q-1} + a_2^{q-2}$; ....

$$a_{p-1}^{q-p+2} = a_{p-1}^{q-p+1} + a_{p-2}^{q-p+2}; \qquad a_p^{q-p+1} = a_{p-1}^{q-p+1} + a_p^{q-p}.$$

Additionnant membre à membre, et remarquant que seul le terme a_p^{q-p} n'est pas répété deux fois dans les seconds membres, on a le théorème.

C. XI. $a_p^p = 2a_p^{p-1} = 2a_{p-1}^p.$

Car $a_p^p = a_p^{p-1} + a_{p-1}^p$; mais, d'après C. V, $a_p^{p-1} = a_{p-1}^p$.

C. XII. $\dfrac{a_{q+1}^p}{a_q^{p+1}} = \dfrac{p}{q}.$

La proposition est vérifiée dans la 2e base, car d'après C. I, $\dfrac{a_2^1}{a_1^2} = \dfrac{1}{1}.$

Or, si la proposition est vérifiée dans la $(p+q-1)^{ème}$ base, elle l'est dans la suivante (*).

Considérons, dans la $(p+q-1)^{ème}$ base, trois nombres consécutifs, a_{q+1}^{p-1}, a_q^p, a_{q-1}^{p+1}. Par hypothèse,

$$\frac{a_{q+1}^{p-1}}{a_q^p} = \frac{p-1}{q}\ (1)\ ; \qquad \frac{a_q^p}{a_{q-1}^{p+1}} = \frac{p}{q-1}. \quad (2)$$

(*) Pascal énonce à cette occasion, sous forme de règle générale, le procédé d'induction complète par récurrence.

Posons $p + q = m + 1$, faisons $a_1^1 = 1$, et appliquons le théorème aux combinaisons simples, comme Pascal le fait, dans la prop. 5, *De combinationibus*. Il vient

$$C_m^p = \frac{m-p+1}{p}\ C_m^{p-1}$$

formule faisant date dans la théorie des combinaisons et des coefficients du binome, qui se calculaient jusque là, par la formule

$$C_m^p = C_{m-1}^p + C_{m-1}^{n-1}.$$

Voir à ce sujet, Paul Tannery, dans IM, question 615 (t. 3, 1896-98).

On tire de (1)

$$\frac{a_{q+1}^{p-1} + a_q^p}{a_q^p} = \frac{p+q-1}{q}\ ; \qquad \text{mais} \qquad a_{q+1}^{p-1} + a_q^p = a_{q+1}^p,$$

d'où

$$\frac{a_{q+1}^p}{a_q^p} = \frac{p+q-1}{q}. \quad (\alpha)$$

On tire de même de (2)

$$\frac{a_q^p + a_{q-1}^{p+1}}{a_q^p} = \frac{p+q-1}{p}\ ; \qquad \text{mais} \qquad a_q^p + a_{q-1}^{p+1} = a_q^{p+1}$$

d'où

$$\frac{a_q^{p+1}}{a_q^p} = \frac{p+q-1}{p}\ ; \quad (\beta)$$

divisant membre à membre (α) par (β),

$$\frac{a_{q+1}^p}{a_q^{p+1}} = \frac{p}{q}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

C. XIII. $\dfrac{a_q^p}{a_q^{p-1}} = \dfrac{p+q-2}{p-1}.$

D'après C. XII,

$$\frac{a_q^{p-1}}{a_{q-1}^p} = \frac{p-1}{q-1}\ ; \quad \text{d'où} \quad \frac{a_q^{p-1} + a_{q-1}^p}{a_q^{p-1}} = \frac{p+q-2}{p-1}\ ;$$

mais $a_q^{p-1} + a_{q-1}^p = a_q^p.$

C. XIV. $\dfrac{a_q^p}{a_{q-1}^p} = \dfrac{p+q-2}{q-1}.$ Même démonstration.

C. XV. $\dfrac{a_1^p + a_2^p + \cdots + a_q^p}{a_q^p} = \dfrac{p+q-1}{q}.$

D'après C. II, $a_1^p + a_2^p + \cdots + a_q^p = a_q^{p+1}.$

Or, C. XIII donne $$\frac{a_q^{p+1}}{a_q^p} = \frac{p+q-1}{q}.$$

C. XVI. $$\frac{a_1^p + a_2^p + \cdots + a_q^p}{a_1^{p+1} + a_2^{p+1} + \cdots + a_{q-1}^{p+1}} = \frac{p+1}{q-1}.$$

D'après C. II,

$$a_1^p + a_2^p + \cdots + a_q^p = a_q^{p+1}; \qquad a_1^{p+1} + a_2^{p+1} + \cdots + a_{q-1}^{p+1} = a_{q-1}^{p+2}.$$

Mais, d'après C. XII, $$\frac{a_q^{p+1}}{a_{q-1}^{p+2}} = \frac{p+1}{q-1}.$$

C. XVII. $$\frac{a_q^p + a_q^{p-1} + \cdots + a_q^1}{a_q^p + a_{q-1}^p + \cdots + a_1^p} = \frac{p}{q}.$$

D'après C. III, $a_q^p + a_q^{p-1} + \cdots + a_q^1 = a_{q+1}^p$.

D'après C. II, $a_q^p + a_{q-1}^p + \cdots + a_q^p = a_q^{p+1}$.

Mais, d'après C. XII, $$\frac{a_{q+1}^p}{a_q^{p+1}} = \frac{p}{q}.$$

C. XVIII. $$\frac{a_1^p + a_2^p + \cdots + a_q^p}{a_1^q + a_2^q + \cdots + a_p^q} = \frac{q}{p}.$$

D'après C. VI, $a_1^p + a_2^p + \cdots + a_q^p = a_p^1 + a_p^2 + \cdots + a_p^q$.

Après cette remarque, PASCAL regarde la conséquence comme démontrée. En effet, d'après C. III,

$$a_p^1 + a_p^2 + \cdots + a_p^q = a_{p+1}^q,$$

d'après C. II, $$a_1^q + a_2^q + \cdots + a_p^q = a_p^{q+1}.$$

et d'après C. XII, $$\frac{a_{p+1}^q}{a_p^{q+1}} = \frac{q}{p}.$$

C. XIX. $$\frac{a_{p+1}^{p+1}}{4a_p^p} = \frac{2p-1}{2p}.$$

Faisons $p = q$ dans C. XIII, il vient

$$\frac{a_{p+1}^{p+1}}{a_{p+1}^p} = \frac{2}{1}, \quad \text{de même,} \quad \frac{a_p^p}{a_p^{p+1}} = \frac{2}{1},$$

d'où $$\frac{a_{p+1}^{p+1}}{4a_p^p} = \frac{a_{p+1}^p}{4a_p^{p-1}}. \qquad (1)$$

Mais on peut écrire (*)

$$\frac{a_{p+1}^p}{4a_p^{p-1}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a_{p+1}^p}{a_p^p} \cdot \frac{a_p^p}{a_p^{p-1}}. \qquad (2)$$

Mais C. XIV donne $\dfrac{a_{p+1}^p}{a_p^p} = \dfrac{2p-1}{p}$; C. XIII donne $\dfrac{a_p^p}{a_p^{p-1}} = \dfrac{2}{1}$,

substituant dans (2) $$\frac{a_{p+1}^p}{4a_p^{p-1}} = \frac{2p-1}{2p}.$$

substituant dans (1) $$\frac{a_{p+1}^{p+1}}{4a_p^p} = \frac{2p-1}{2p},$$

PROBLÈME. *Calculer* a_q^p, *connaissant* p, q *et* a_1^1.

On peut écrire, en remarquant que $a_{q+p-1}^1 = a_1^1$ (à cause de C. I)

$$\frac{a_q^p}{a_1^1} = \frac{a_q^p}{a_{q+1}^{p-1}} \times \frac{a_{q+1}^{p-1}}{a_{q+2}^{p-2}} \times \cdots \times \frac{a_{q+p-3}^3}{a_{q+p-2}^2} \times \frac{a_{q+p-2}^2}{a_1^1}.$$

(*) PASCAL nomme le produit $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ de deux rapports, la *raison composée de la somme* de ces rapports, ce qu'il écrit $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$, le signe $+$ ayant ici le sens *multiplié par*.

Or, C. XII donne

$$\frac{a_q^p}{a_{q+1}^{p-1}} = \frac{q}{p-1} \;; \quad \frac{a_{q+1}^{p-1}}{a_{q+2}^{p-1}} = \frac{q+1}{p-2} \;; \quad \cdots \frac{a_{q+p-2}^2}{a_1^1} = \frac{q+p-2}{1}$$

d'où
$$\frac{a_q^p}{a_1^1} = \frac{q(q+1)\cdots(q+p-2)}{(p-1)!} \quad (*)$$

Une remarque encore pour terminer.

PASCAL joint de nombreux petits mémoires à son *Traité du Triangle arithmétique*, les uns en français, d'autres en latin. Dans ces mémoires il renvoie souvent au *Traité du Triangle*. On avait observé que, dans les mémoires latins, le numérotage des *Conséquences* était d'ordinaire trop faible d'une unité, ce qui ne laissait pas que de dérouter le lecteur non prévenu. Le fait vient de recevoir une explication, qu'on soupçonnait d'ailleurs. PASCAL avait primitivement écrit le *Traité du Triangle* en latin. On le croyait perdu, mais on vient d'en découvrir récemment, à la Bibliothèque de Clermont, un exemplaire tout imprimé, comme les autres. On sait que cette Bibliothèque possède de nombreuses plaquettes rarissimes provenant de la succession de PASCAL, et l'édition latine du *Triangle* fait partie de ce legs. Dans cette édition les *Conséquences* II et III sont réunies sous le même numéro.

Le *Traité* latin a été réédité, pour la première fois, dans les *Œuvres de* BLAISE PASCAL publiées dans la Collection : *Les Grands Écrivains de la France*, t. XI, Paris, Hachette, 1914, pp. 366-380.

(*) Dans la remarque (*monitum*) qui termine son traité *De combinationibus*, PASCAL traite le même problème pour les combinaisons simples et trouve la formule, qui lui a été communiquée, dit-il, par M. DE GAGNIÈRES.

$$C_m^p = \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{p!}.$$

C'est à tort que l'*Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées* (Ed. française, t. I, vol. I, fasc. I, p. 84.) dit que PASCAL n'a pas donné la formule C_m^p sous la forme d'un produit de facteurs.

VALEURS CRITIQUES CONCERNANT LE POIDS D'UN NOMBRE PREMIER ET LE POIDS TOTAL D'UN NOMBRE COMPOSÉ,

par M. H. DE MONTILLE (Oran).

1. DÉFINITIONS. Nous désignerons par $r(y)$ ou r_y la fraction $\frac{1}{2y-1}$; si de plus y est un entier premier absolu, nous appellerons $r(y)$ son *poids* ; et nous nommerons *poids total* d'un nombre entier quelconque x la somme $\Phi(x)$ des poids des facteurs premiers, distincts, de ce nombre.

2. PROBLÈME. *Résoudre les équations ou inéquations*

$$(1)\ \mathrm{Px} = \sigma(\mathrm{x}), \qquad (2)\ \mathrm{Px} \leqslant \sigma(\mathrm{x}), \qquad (3)\ \mathrm{J}(\mathrm{x}) \leqslant \frac{1}{\mathrm{P}},$$

dans lesquelles P est un nombre positif donné, $\sigma(\mathrm{x})$ *la somme de tous les diviseurs du nombre entier* x (*sans l'en excepter*), *et* J (x) *la fonction numérique égale au quotient de* x *par* $\sigma(\mathrm{x})$.

Ces équations n'ont pas de solution où x ne soit pas entier, car elles ne gardent de sens qu'à ce prix. (*).

3. THÉORÈME. *Aucun nombre entier ne peut vérifier les équations ou inéquations* (1), (2), (3), *tant que son poids total ne dépasse pas*

$$(4) \qquad \frac{1}{2(1+\varepsilon_a)}\,\mathrm{Log\,P},$$

Log P *désignant le logarithme népérien de* P *et* ε_a, *la valeur de*

$$(5) \qquad \varepsilon_y = \frac{r^2(y)}{3[1-r^2(y)]}$$

pour y *égal au plus petit diviseur* a *de* x *plus grand que l'unité.*

(*) Et à toute valeur entière arbitraire prise pour x correspond un nombre positif $P > 1$ tel que x soit solution.

Dans les cas où P est entier la résolution de l'équation (1) donne les nombres parfaits ($P = 2$), et les nombres x sous-multiples de la somme de leurs parties aliquotes, ces nombres x, qu'on pourrait appeler aliquotaires de coefficient P, ont été fort étudiés par FERMAT et DESCARTES.