 37. 1913

milieu. Une texture différente des deux parties du pédicelle est très facile à observer; les fleurs non fécondées tombent et laissent un moignon de pédicelle terminé par un léger épatement qui se marque d'ailleurs déjà sur le pédicelle floral. Chez les *Iodes kamerunensis* Engler, *I. Klaineana* Pierre, *I. Laurentii* De Wild., la désarticulation se marque également. Chez cette dernière espèce surtout, dans les plantes femelles, la désarticulation se fait en général contre le rachis principal. On peut également remarquer une désarticulation, mais moins nette, chez l'*I. cochinchinensis* Pierre, dont les pédicelles sont très grêles.

Nous relevons dans la famille des Rosacées les espèces suivantes citées par M. Lecomte :

Prunus spinosa L.; *Sorbus Aria* Crantz; *S. Aucuparia* L.; *Crataegus spathulata; Hirtella angustifolia* Schott; *Parinarium glabrum* Oliver; *P. Griffithianum* Benth.; *P. robustum* Oliv. *Moquilea guyanensis* Aubl.

J'ai également signalé l'articulation du pédicelle chez *Magnistipula Butayei* De Wild. *(Études fl. Bas- et Moyen-Congo,* II p., p. 225), et chez *M. Sapini* De Wild.; elle s'observe également, fort nette, vers la base du pédicelle, chez le *M. Zenkeri* Engler.

LES DÉMONSTRATIONS PAR L'ANALYSE INFINITÉSIMALE CHEZ LUC VALERIO

PAR

H. BOSMANS, S. J.

I

Kepler, Cavalieri, Saint-Vincent connurent évidemment Stevin. En est-il de même de Luc Valerio ?

C'est beaucoup plus douteux, car son traité du *Centre de gravité* (1) parut à Rome, en 1604, et sa *Quadrature de la parabole* (2) y fut publiée deux ans plus tard, en 1606. Ces deux ouvrages sont

(1) *De Centro Gravitatis Solidorum Libri Tres. Lvcae Valerii Mathematicae & Civilis Philosophiae in Gymnasio Romano professoris.* Romae, Typis Bartholomaei Bonfadini. MDCIIII. Svperiorvm Permissv. (Univ. de Louvain. Scienc. 718).

L'ouvrage est un in-4° divisé en trois livres, qui ont chacun une pagination distincte. Dans les citations nous désignerons ces livres par un chiffre romain.

(2) *Qvadratvra Parabolae Per Simplex Falsvm. Et altera quàm secunda Archimedis expeditior Ad Martivm Colvmnam. Lucae Valerii Mathematicae Et Civilis Philosophiae, in almo Vrbis gymnasio publici professoris.* Romae, Apud Lepidum Facium. M.DCVI. Svperiorvm Permissv. (Univ. de Louvain. Scienc. 718; relié à la suite de l'ouvrage précédent).

Ce petit traité est divisé en deux parties ayant de nouveau chacune une pagination distincte; la première a la forme d'une lettre « Marco Colvmnae Lagaroli duci »; la seconde est intitulée : *Lucii Valerii qvadratvra parabolae.*

donc respectivement de quatre ans et de deux ans antérieurs aux *Hypomnemata mathematica* de Stevin.

Ils eurent une réédition à Bologne, en 1661 [1].

Les exemplaires du *Centre de gravité* et ceux de la *Quadrature de la parabole* sont devenus des raretés bibliographiques. Valerio nous avertit lui-même que ceux de sa première édition du *Centre de gravité* diffèrent entre eux. Il en avait offert quelques-uns en hommage, dit-il [2], qui ne contenaient pas la proposition 3 du livre II. Cette proposition est une des plus intéressantes du volume et nous la donnons plus loin. Au fond l'omission est moins grave qu'il ne semblerait d'abord, car ces exemplaires contenaient néanmoins les propositions 1 et 2 du même livre, qui pour un géomètre d'aujourd'hui sont équivalentes à cette proposition 3. Nous y reviendrons.

Valerio naquit vers 1552, enseigna à la Sapience de Rome, fut membre de l'Académie des Lincei et mourut en 1618. C'est un auteur très oublié, dont M. Cantor [3] dit à peine un mot en pas-

[1] *De Centro Gravitatis Solidorvm Libri Tres. Lvcae Valerii Mathematicae, & Civilis Philosophiae in Gymnasio Romano Professoris celeberrimi. In hac nostra editione, seruata ad vnguem Auctoris mente multo correctiores.* Bononiae, Ex Typographia Haeredum de Ducciis. MDC.LXI. Superiorum permissu. (Univ. de Louvain, Scienc. 719).

Dans cette édition le traité de la *Quadrature de la parabole* fait suite à celui du *Centre de gravité*, mais sous un titre distinct.

Qvadratvra Parabolae Per Simplex Falsum. Et altera, quam secunda Archimedis expeditior Ad Martivm Colvmnam. Lvcae Valerii Mathematicae, & civilis Philosophiae, in almo Vrbis Gymnasio publici professoris. Bononiae, Ex Typographia Haeredes (sic) de Ducciis. M.DC.LX. Superiorum permissu.

On remarquera le millésime de la date : 1660, au lieu de 1661. C'est que le titre de départ et les sept pages préliminaires qui suivent auront été imprimés en dernier lieu.

Outre les ouvrages mentionnés ci-dessus, on a de Valerio une quinzaine de lettres publiées par M. Favaro, dans l'édition nationale des Œuvres de Galilée. Voir : *Le Opere di Galileo Galilei. Edizione nazionale*, t. 18. Firenze, Barbera, 1906, p. 543, où l'éditeur en donne la liste, dans l'index alphabétique de la Correspondance de Galilée.

[2] « Haec autem propositio in paucis exemplaribus quae dono quibusdam dederam, non extat. » *De Centro*. Ed. 1604, II, pp. 7 et 8. Ed. 1661, p. 74.

[3] *Vorlesungen ueber Geschichte der Mathematik*, 2e éd., t. 2, Leipzig, Teubner, 1900, pp. 695, 696 et 698.

sant, mais Montucla [1] en fait grand éloge. Cavalieri le nomme, dans sa *Géométrie des indivisibles* [2] et Jean Charles della Faille, dans son traité du *Centre de gravité* [3], invoque souvent son autorité. De nos jours, c'est M. Wallner [4] qui le premier a rappelé l'attention sur Luc Valerio et le degré d'influence qu'il est permis de lui attribuer sur Cavalieri.

Je viens d'avoir l'occasion de lire Valerio. Il mérite mieux, me semble-t-il, qu'une simple mention, élogieuse je le veux bien, mais perdue dans un article consacré à un sujet général, comme celui de M. Wallner. Grâce à l'obligeance de M. Wils, bibliothécaire-adjoint à la Bibliothèque de l'Université de Louvain, j'ai toutes les éditions des œuvres de Valerio sous les yeux.

II

Dans le livre I *De Centro Gravitatis* on rencontre tout d'abord une généralisation bien remarquable d'un théorème démontré par Archimède pour le cas particulier du conoïde et du sphéroïde [5] c'est-à-dire des surfaces de révolution du second degré.

[1] *Histoire des Mathématiques*... t. 2... Paris, Agasse, An VII, p. 4.

[2] *Geometria indivisibilibus continuorum Nova quadam ratione promota. Authore P. Bonaventura Cavalerio Mediolanen. Ordinis S. Hieron... In hac postrema editione ab erroribus purgata...* Bononiae M.DC.LIII. Ex typographia de Duciis. Superiorum permissu. Préface, f° 6, v°. (Observ. Royal d'Uccle).

L'édition de 1653 est, on le sait, la seconde ; je n'ai pas l'édition originale de 1635 sous la main, mais j'en connais un exemplaire à l'Université de Louvain.

[3] *Ioannis Della Faille Antverpiensis E Societate Iesv In Academia Matritensi Collegii Imperialis Regii Matheseos Professoris Theoremata De Centro Gravitatis Partivm Circvli et Ellipsis.* Antverpiae, Ex officina Typographica Ioannis Mevrsi. Anno M.DC.XXXII. (Bibl. Royale de Belgique V. H. 8139).

[4] *Über die Entstehung des Grenzbegriffes*. BIBLIOTHECA MATHEMATICA, Leipzig, 1903, 3e sér., t. 4, pp. 246-259.

Article érudit, très travaillé, écrit par un auteur d'une compétence spéciale, dans toutes les questions relatives à l'histoire du calcul infinitésimal.

[5] « *Des conoïdes et sphéroïdes*. Éd. Heiberg, t. I, 1880, pr. 19-20, pp. 375-387 ; Éd. Peyrard, pr. 21-22, pp. 163-167.

« PROPOSITION VI (fig. 1) (¹)

» *A toute figure déficiente du même côté d'un diamètre, on peut inscrire une figure composée de parallélogrammes de même hauteur, et lui en circonscrire une autre, de telle manière que la figure circonscrite surpasse l'inscrite d'une quantité moindre qu'une grandeur quelconque, si petite soit-elle* (²). »

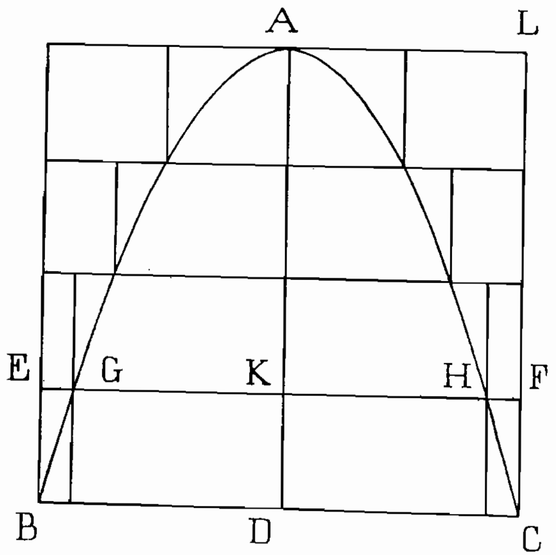

FIG. 1.

La figure dont il s'agit est plane. Mais qu'est-ce qu'une figure plane déficiente du même côté autour d'un diamètre? Valerio ne la définit pas, mais lui suppose les propriétés suivantes :

(¹) *De Centro*. Ed. 1604, I, pp. 14 et 15; Éd. 1661, pp. 13 et 14.

(²) « Omni figurae circa diametrum in alteram partem deficienti, figura quaedam ex parallelogrammis describi potest, et altera circumscribi, ita ut circumscripta superet inscriptam minori spacio quantacumque magnitudine proposita. » *O. c.* Éd. 1604, I, p. 14 ; Éd. 1661, p. 13.

1° Elle est tout entière d'un même côté de la corde qui sous-tend les extrémités de l'arc.

2° Elle a un diamètre conjugué à cette corde, qui rencontre la courbe.

3° Elle est tout entière concave par rapport à la partie du diamètre comptée de la courbe vers la corde. En d'autres termes : prenons BC pour axe des X et DA comme axe des Y positifs; la concavité de la courbe doit être tournée tout entière du côté des Y négatifs.

Soit donc une figure ABC, déficiente de la corde BC vers A, autour du diamètre AD. Par des bissections successives, divisons le diamètre AD en 2^n parties égales. Par chacun des points de division menons des parallèles à BC, puis achevons les parallélogrammes inscrits et circonscrits en menant des parallèles à AD. Poursuivons le nombre n des opérations, jusqu'à ce que le parallélogramme BCFE, adjacent à la corde BC, soit inférieur à une surface donnée, si petite soit-elle; ce qui est toujours possible.

Après avoir assez longuement expliqué cette construction, Valerio raisonne comme suit :

« Je dis que la figure circonscrite surpasse l'inscrite d'une quantité moindre qu'une surface donnée. Car la somme de tous les parallélogrammes, par lesquels la figure circonscrite surpasse l'inscrite, est égale au parallélogramme BF. Or, le parallélogramme BF est moindre qu'une surface donnée. Donc, l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est moindre qu'une surface donnée. Donc on peut faire ce qu'on se proposait (¹). »

C'est tout, et j'ai traduit mot à mot. Plus d'un géomètre signerait encore aujourd'hui pareille démonstration.

(¹) « Dico harum figurarum inscriptam superari circumscripta minori spacio superficie proposita. Quoniam enim omnia parallelogramma quibus figura circumscripta superat inscriptam simul sumpta sunt aequalia BF parallelogrammo. Sed parallelogrammum BF est minus superficie proposita. Excessus igitur quo figura circumscripta inscriptam superat, minor erit superficie proposita. Fieri igitur potest, quod proponebatur. » Éd. 1604, I, p. 15; Éd. 1661, p. 14.

« PROPOSITION XI (fig. 1) [1]

« *A tout solide déficient du même côté autour d'un axe, dont la base est un cercle ou une ellipse, on peut inscrire une figure composée de cylindres, ou de portions de cylindres, de même hauteur et lui en circonscrire une autre, de telle manière que la figure circonscrite surpasse l'inscrite d'un excès moindre qu'une grandeur quelconque.* »

L'auteur attribue à son solide déficient du même côté autour d'un axe des propriétés analogues à celles de la figure plane déficiente du même côté autour d'un diamètre :

1° Le solide doit être situé tout entier du même côté du plan du cercle, ou de l'ellipse, qui lui sert de base.

2° Il doit être doué d'un axe. Il faut entendre par là, non pas un axe de symétrie, mais un simple diamètre conjugué du plan du cercle ou de l'ellipse. Ce diamètre doit rencontrer la surface courbe du solide en un point.

3° En supposant que le sens positif de l'axe DA soit compté de D vers A, la concavité de la surface courbe doit être tout entière tournée vers la partie négative de l'axe.

Pour démontrer le théorème, Valerio se sert de la figure de la proposition VI (fig. 1), sans y apporter la moindre modification. Par de petits cylindres inscrits et circonscrits au solide déficient, il y imagine une construction anologue à celle qu'il a faite, par des parallélogrammes, sur la courbe plane déficiente. Quand les cylindres sont obliques, à l'exemple d'Archimède, il les nomme *portions de cylindres*.

La manière de raisonner de Valerio diffère assez de celle d'Archimède dans les théorèmes analogues. Le Syracusain constate que les cylindres inscrits et circonscrits, construits deux à deux, sur

(1) *De Centro*. Éd. 1604, II, pp. 26 et 27; Éd. 1661, pp. 23 et 24.

(2) « Omni solido circa axim in alteram deficienti, cujus basis sit circulus vel ellypsis, figura quaedam ex cylindris, vel cylindri portionibus aequalium altitudinum inscribi potest, et altera circumscribi, ita ut circumscripta superet inscriptam minori excessu quacumque magnitudine proposita. » Éd. 1604, I, p. 26; Éd. 1661, p. 23.

un même cercle ou sur une même ellipse, sont égaux comme ayant une base commune et des hauteurs égales. Seul, le dernier cylindre circonscrit BEFC, adjacent à la base BC du solide, n'a pas de cylindre qui lui est égal. Il est donc équivalent à l'excès de la somme des cylindres circonscrits, sur celle des cylindres inscrits.

Chez Valerio, c'est le cylindre supérieur, voisin du sommet A, qui n'est comparé à aucun autre. L'auteur retranche deux à deux les cylindres tels que BF et GDH (fig. 1), compris entre les mêmes plans parallèles; et c'est la somme des anneaux ainsi formés, augmentée du cylindre adjacent au sommet A, qui vaut le cylindre BEFC.

Ces explications préliminaires étaient nécessaires, car, à une première lecture, le texte de Valerio est un peu obscur. Le voici :

« Soit le solide ABC coupé par les dits plans. Les sections seront des cercles ou des ellipses semblables entre eux et semblables à la base BC du solide ABC. Sur ces sections comme bases, ayant construit, intérieurement et extérieurement à la figure, des cylindres ou des portions de cylindres de même hauteur, on compare entre elles celles qui sont comprises entre les mêmes plans parallèles : par exemple, BF et GDH, qui ont pour axe commun DK ; pour bases, les cercles ou les ellipses EF, GH ; pour centre commun K. » (Le cylindre ou la portion de cylindre la plus élevée, adjacente à A, n'est comparée à aucune autre).

« Comme, par construction, le cylindre ou la portion du cylindre BF est inférieure à une grandeur donnée ; comme d'autre part, tous les excès, par lesquels les cylindres composant la figure circonscrite dépassent, en les comparant deux à deux, ceux qui composent la figure inscrite, ajoutés au (cylindre) supérieur — qui n'est comparé à aucun autre, — valent le cylindre, ou la portion de cylindre, BF ; la figure circonscrite au solide ABC, dépasse la figure inscrite d'une quantité moindre qu'une grandeur donnée [1].

» On peut donc faire ce que nous demandions. »

(1) Voici le texte même de cette phrase embrouillée : « Quoniam igitur ex constructione, cylindrus, vel cylindri portio BF, est minor magnitudine proposita ; excessus autem omnes, quibus cylindri, ex quibus constat figura circumscripta,

On s'attendrait, il est vrai, à voir l'auteur faire un pas de plus ; à l'entendre dire que la somme des petits espaces compris entre la surface courbe et les cylindres inscrits ou circonscrits, peut aussi devenir moindre qu'une grandeur donnée.

Si Valerio ne tire pas ici, en termes exprès, cette conclusion, en fait, il la supposera désormais démontrée par son théorème. Je vois même là la raison de la complication apparente qu'il introduit dans le raisonnement d'Archimède. Par la démonstration de Valerio, en effet, il devient intuitif que la somme de ces petits espaces est a fortiori inférieure au cylindre BF.

On pourrait évidemment faire des remarques analogues sur les petits triangles curvilignes compris entre l'arc de la courbe déficiente et les parallélogrammes qui lui sont inscrits et circonscrits.

Pour apprécier Valerio à sa valeur, encore une fois, n'oublions pas qu'il écrit en 1604. Sans doute, la généralisation des théorèmes d'Archimède nous paraît aujourd'hui simple et facile ; sans doute Stevin l'a entrevue, dès 1586 ; mais, ce n'est pas néanmoins un mince mérite pour le géomètre italien, que d'avoir formulé et démontré une fois pour toutes, dès les premières années du XVII^e siècle, ses deux théorèmes généraux sur les surfaces et les volumes déficients.

III

Le second livre débute par trois théorèmes sur les proportions, qu'un géomètre moderne ne distinguerait pas l'un de l'autre. On sait les idées courantes de l'époque sur les formes multiples qu'il convenait de donner, dans cette théorie des proportions, aux énoncés d'un même théorème. Voici d'abord le texte même de la proposition VI (²) ; je traduirai ensuite.

excedunt eos, ex quibus constat figura inscripta, prout bini inter se referuntur, una cum supremo, qui ad nullum refertur, sunt aequalia cylindro, vel cylindri portioni BF, figura circumscripta solido ABC, excedet inscriptam minori excessu magnitudine proposita. Fieri igitur potest quod proponebamus. » *De Centro*, Éd. 1604, I, pp. 26 et 27 ; Éd. 1661, p. 24.

(²) *De Centro*, Éd. 1604, II. pp. 6-8 ; Éd. 1661, pp. 74-75.

Aux pp. 250 et 251 de son article cité ci-dessus, M. Wallner a fait remarquer, avec raison, l'intérêt du théorème de Valerio.

« Si major vel minor prima, ad unà majorem vel minorem secunda, minore excessu vel defectu quantacumque magnitudine proposita, nominatam habuerit proportionem ; prima ad secundam eandem nominatam habuerit proportionem. »

Pour rendre cet énoncé intelligible, j'employerai les lettres mêmes dont se sert l'auteur dans la démonstration. Soit donc A, la *quantitas prima ;* E, la *quantitas major vel minor prima, minore excessu vel defectu, quantacumque magnitudine proposita ;* B, la *quantitas secunda ;* F, la *quantitas unà* (en même temps) *major vel minor secunda, minore excessu vel defectu quantacumque magnitudine proposita ;* $\frac{C}{D}$ la *nominata proportio* (le rapport donné).

Dans tout ceci A, B et $\frac{C}{D}$ sont des constantes, E et F des variables. Je traduis maintenant, un peu librement si l'on veut au point de vue de la phrase, mais très rigoureusement au point de vue du sens :

Si l'on a simultanément E — A et F — B, ou bien A — E et B — F, inférieurs à une grandeur arbitrairement petite donnée ; si de plus, on a (toujours) (¹)

$$\frac{E}{F} = \frac{C}{D}$$

on aura aussi

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

Nous dirions aujourd'hui : Si

$$\lim E = A \quad \text{et} \quad \lim F = B$$

et si de plus on a toujours

$$\frac{E}{F} = \frac{C}{D} \quad \text{on a aussi} \quad \frac{\lim E}{\lim F} = \frac{C}{D}$$

(¹) Le mot « toujours » n'est pas dans l'énoncé ; mais la démonstration le suppose.

Dans la proposition II, ce n'est pas simplement le rapport $\frac{C}{D}$, mais les nombres C et D eux-mêmes qui sont donnés. Il en est de même, dans la proposition I ; de plus, Valerio suppose dans cette dernière qu'au lieu de

$$\frac{E}{F} = \frac{C}{D} \quad \text{on a toujours} \quad \frac{E}{C} = \frac{F}{D}$$

La démonstration des deux premiers théorèmes se fait par l'absurde ; quant au troisième, l'auteur le ramène au second, dont effectivement, pour nous, il ne diffère pas.

Pareils théorèmes, énoncés en 1604, sont des plus remarquables. Personne ne le niera.

Valerio en fait immédiatement de nombreuses applications.

Dans la proposition XII du même livre ([1]), par exemple, il démontre par un artifice ingénieux, que la demi-sphère vaut le double du cône et les $\frac{2}{3}$ du cylindre de même base et de même hauteur. Pour abréger, je me contente de donner en note un aperçu sommaire de la démonstration ([2]) ; car, il sera plus intéressant de suivre en détail les raisonnements de Valerio, dans une proposition analogue relative au conoïde parabolique déjà traitée par Archimède.

([1]) *De Centro*, Éd. 1604, II, pp. 17-20 ; Éd. 1661, pp. 83-85.

([2]) Valerio suppose démontré que le cône vaut le tiers du cylindre de même base et de même hauteur. Ceci posé, voici son raisonnement :

Il circonscrit à la demi-sphère un cylindre droit de même base et ayant pour hauteur le rayon de la sphère. Pour fixer les idées, supposons que la base commune soit la base inférieure du cylindre.

Il inscrit ensuite au cylindre un cône droit renversé, ayant pour base, la base supérieure du cylindre et pour sommet le centre de la sphère.

Il mène le rayon de la sphère perpendiculaire au cercle de la base, rayon qui devient ainsi la hauteur commune aux trois solides ; il le divise, par des bissections successives, en 2^n parties égales ; puis, par les points de division, il mène des plans parallèles aux bases et achève les cylindres inscrits au cône et circonscrits à la sphère, ainsi que ceux qui sont déterminés par les plans sur le grand cylindre.

Soient R, le rayon de la sphère donnée ; r, le rayon variable des cylindres inscrits au cône ; ρ, celui des cylindres circonscrits à la sphère ; h, la hauteur commune des cylindres.

En partant de la propriété que l'ordonnée perpendiculaire au diamètre d'un cercle est moyenne proportionnelle entre les deux segments déterminés sur le diamètre ; et en remarquant que le triangle qui engendre le cône est isocèle, Valerio démontre sans peine, que l'on a toujours :

$$R^2 - r^2 = \rho^2 ; \quad \text{d'où} \quad \Sigma\pi R^2 h - \Sigma\pi r^2 h = \Sigma\pi\rho^2 h,$$

Mais

$$\Sigma\pi R^2 h = \text{cylindre} ; \qquad \lim \Sigma\pi r^2 h = \text{cône} ; \qquad \lim \Sigma\pi\rho^2 h = \frac{1}{2}\ \text{sphère} ;$$

d'où

$$\frac{1}{2}\ \text{sphère} = \text{cylindre} - \text{cône} = 2\ \text{cônes} = \frac{2}{3}\ \text{cylindre}.$$

Cavalieri, plus que tout autre, devait admirer, cela va de soi, de pareilles démonstrations. Aussi ne s'étonne-t-on plus, après cela, de lui entendre nommer Valerio à côté d'Archimède et de Kepler, dans la préface de ses *Indivisibles*.

« LIVRE II. PROPOSITION XVIII (fig. 2) ([1])

» *Tout conoïde parabolique vaut la moitié du cylindre et une fois et demie la cône de même base et de même hauteur.*

» Soit le conoïde parabolique ABC, le cylindre AE et le cône ABC ayant tous pour base le même cercle de diamètre AC ; pour axe BD, et par conséquent ayant tous la même hauteur.

» Je dis que le conoïde ABC vaut la moitié du cylindre AE et une fois et demie le cône ABC.

» Car, soit divisé l'axe BD en parties égales, dont la dernière adjacente à la base est MD, jusqu'à ce que l'ensemble des cylindres de même hauteur circonscrits au conoïde, surpasse les cylindres inscrits d'une quantité moindre qu'une grandeur arbitrairement donnée.

» Supposons que cela soit fait.

» Comme les plans parallèles, qui passent par les susdits points de division de l'axe BD et coupent le conoïde ABC, coupent aussi le *triangle par l'axe* ([2]) ABC, ces sections seront des droites parallèles.

([1]) *De Centro*, Éd. 1604, II, pp. 28-31 ; Éd. 1661, pp. 92 et 93. Cf. Archimède : *Des Conoïdes et sphaeroïdes*, Éd. Heiberg, t. I, 1880, pr. 21 et 22, pp. 387-405, Éd. Peyrard, pr. 23 et 24, pp. 167-175.

([2]) *Triangle par l'axe*. Expression empruntée à Apollonius, par laquelle se désignait le triangle déterminé, dans la surface latérale et la base du cône, par un plan mené par l'axe du cône.

» Formons une figure circonscrite au triangle ABC, composée de parallélogrammes de même hauteur, jusqu'à ce qu'elle aussi surpasse le triangle d'une surface moindre qu'une grandeur arbitrairement donnée. (Valerio semble avoir eu ici une distraction. Pour la correction, ou tout au moins l'élégance de la démonstration, il eût dû dire, on le verra : surpasse la figure formée par l'ensemble des parallélogrammes inscrits.)

» Parmi les cylindres circonscrits au conoïde et les parallélogrammes en nombre égal circonscrits au triangle ABC, que les deux cylindres les plus proches de la base AC soient AF, HL ; et que les parallélogrammes en même nombre qui leur correspondent entre les mêmes plans parallèles, soient AF, GK. »

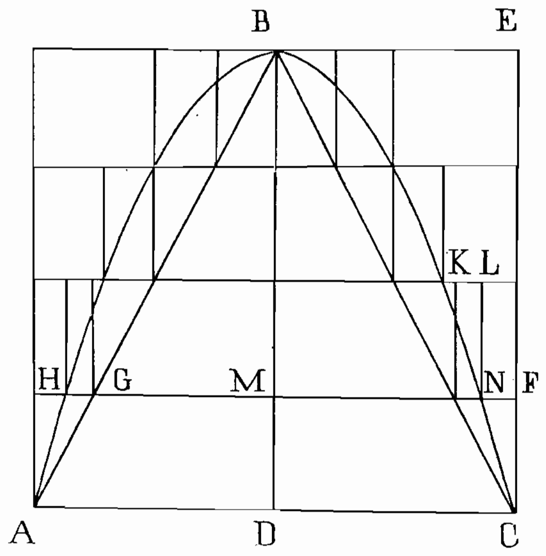

Fig. 2.

Viennent ici diverses transformations algébriques, que pour la clarté et la brièveté, nous exprimerons en notations modernes.

HM et AD étant deux ordonnées de la parabole ABC (¹) et les cylindres ayant la même hauteur, on a

(¹) Ce point de départ est emprunté à Archimède.

$$\frac{BM}{BD} = \frac{HM^2}{AD^2} = \frac{\text{cercle HM}}{\text{cercle AD}} = \frac{\text{cylindre HL}}{\text{cylindre AF}}$$

Mais, les triangles BMG, BAD étant semblables, et les parallélogrammes ayant aussi la même hauteur

$$\frac{BM}{BD} = \frac{GM}{AD} = \frac{\text{parall. GK}}{\text{parall. AF}}$$

D'où

$$\frac{\text{cylind. HL}}{\text{cylind. AF}} = \frac{\text{parall. GK}}{\text{parall. AF}}$$

Valerio transforme cette proportion dans le style du temps. En résumé il en déduit

$$\frac{\text{cylind. AF}}{\text{parall. AF}} = \frac{\text{cylind. AE}}{\text{parall. AE}}$$

d'où

$$\frac{\text{parall. GK}}{\text{cylind. HL}} = \frac{\text{parall. AE}}{\text{cylind. AE}}$$

On remarquera que ce dernier rapport est constant. Par conséquent, en faisant le même raisonnement pour un cylindre et un parallélogramme quelconques, compris entre les deux mêmes plans parallèles, on en déduit :

$$\frac{\Sigma\ \text{parall. GK}}{\Sigma\ \text{cylind. HL}} = \frac{\text{parall. AE}}{\text{cylind. AE}}$$

Ici, je reprends le texte de Valerio, mais en observant toutefois que les proportions et les égalités sont exprimées en longues phrases ordinaires. Il sera superflu de dire, après cela, combien, sans manquer de rigueur, la forme de raisonnement du géomètre italien, l'emporte, en brièveté, sur les longues démonstrations par l'absurde d'Archimède.

« Or, dit Valerio, chacune des deux figures circonscrites surpasse la figure inscrite correspondante d'une grandeur inférieure à une grandeur donnée, si petite soit-elle ; (il s'agit, bien entendu, des deux figures formées, l'une par l'ensemble des cylindres, l'autre par celui des parallélogrammes). Donc

$$\frac{\text{triangle ABC}}{\text{parall. AE}} = \frac{\text{conoïde ABC}}{\text{cylind. AE}}$$

» Mais

$$\text{triangle ABC} = \frac{1}{2}\text{ parall. AE; donc conoïde ABC} = \frac{1}{2}\text{ cylind. AE}$$

» Or

$$\text{cylindre AE} = 3 \text{ cônes ABC; donc conoïde ABC} = 1\frac{1}{2}\text{ cône ABC.}$$

» Ce qu'il fallait démontrer. »

On pourrait multiplier les théorèmes intéressants. Quelques-uns sont des plus curieux, par les artifices ingénieux de l'auteur, soit pour trouver l'expression des rapports des sommes des cylindres ou des parallélogrammes inscrits ou circonscrits; soit pour les combiner entre eux par voie d'addition ou de soustraction. En voici un exemple tiré de l'*Appendice* (1) du Livre III.

» PROPOSITION IV (2)

» *Que l'on circonscrive au conoïde parabolique une figure et qu'on lui en inscrive une autre, formée de cylindres de même hauteur, en les mettant deux à deux entre les mêmes plans parallèles, de manière à leur donner pour axe commun le segment de l'axe du conoïde; qu'on n'opère pas sur le plus petit des cylindres*

(1) L'impression du livre II du traité des *Centres de Gravité* était achevée, dit l'auteur, quand il imagina une méthode pour simplifier la détermination du centre de gravité du conoïde hyperbolique, qu'il avait donnée dans ce livre. Cette nouvelle méthode consistait à décomposer le conoïde hyperbolique en un conoïde parabolique intérieur et une espèce d'anneau formé par la différence entre l'hyperboloïde et le paraboloïde. Le volume du paraboloïde et la position de son centre de gravité avaient été été déterminés au livre II. Dans l'*Appendice* l'auteur détermine le volume et la position du centre de gravité de l'anneau. En combinant ces divers éléments il trouve la position du centre de gravité de l'hyperboloïde.

(2) *De Centro*. Éd. 1604, III, p. 87. Éd. 1661, pp. 218-219.

circonscrits (minimo circonscriptorum ad nullum relato); — *tous les résidus formés en retranchant des cylindres de la figure circonscrite, ceux de la figure inscrite, seront égaux entre eux, et au plus petit cylindre* ».

La démonstration de Valerio est basée sur l'équation de la parabole, nous l'abrégerons beaucoup en la donnant en style et notations modernes.

Menons un plan quelconque par l'axe AD du paraboloïde (fig. 1); nous déterminerons ainsi la parabole génératrice. Prenons AD pour axe des x, AL pour axe des y (1), et nommons (x_1, y_1), (x_2, y_2) .... (x_n, y_n), les coordonnées des n sommets des parallélogrammes pris sur la parabole de A vers C. L'équation de la parabole donne pour trois sommets consécutifs quelconques (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}), (x_{k+2}, y_{k+2})

$$\frac{y^2_k}{x_k} = \frac{y^2_{k+1}}{x_{k+1}} = \frac{y^2_{k+2}}{x_{k+2}}$$

d'où en posant KD $= h$

$$\frac{\pi y^2_{k+1}h - \pi y^2_k h}{x_{k+1} - x_k} = \frac{\pi y^2_{k+2}h - \pi y^2_{k+1}h}{x_{k+2} - x_{k+1}}$$

Mais

$$x_{k+1} - x_k = x_{k+2} - x_{k+1} = h$$

donc, on a aussi pour les anneaux

$$\pi y^2_{k+1}h - \pi y^2_k h = \pi y^2_{k+2}h - \pi y^2_{k+1}h$$

Considérons maintenant les deux sommets (x_1, y_1), (x_2, y_2) les plus proches de A,

$$x_2 = 2x_1 \qquad \text{d'où} \qquad \pi y^2_2 h - \pi y^2_1 h = \pi y^2_1 h$$

ce qui démontre le théorème.

(1) Valerio se sert couramment des mots « abscissae » et « ordinatim applicatae », pour désigner les abscisses et les ordonnées. D'après M. Wallner ce serait le plus ancien exemple connu de l'emploi de ces mots. *Die Wandelungen des Indivisibilienbegriffs von Cavalieri bis Wallis*. BIBLIOTH. MATH., 3e sér., t. 4, 1903, p. 37.

IV

Donnons, en guise de conclusion, un théorème tiré de la *Quadrature de la parabole*. Il permettra de nouveau la comparaison immédiate de la méthode de Valerio, non seulement avec celles d'Archimède, mais aussi avec celle de Stevin.

« PROPOSITION II (fig. 3) (¹)

» *Le diamètre divise toute parabole en parties équivalentes nommées semi-paraboles.* »

Il s'agit dans ce théorème d'un segment de parabole et du diamètre conjugué de la corde qui sous-tend les extrémités de l'arc.

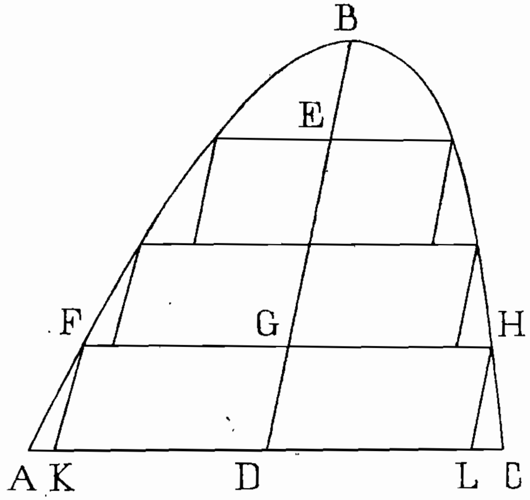

Fig. 3.

« Soit la parabole ABC, dont B est le sommet (c'est-à-dire le point de percée du diamètre et de la courbe) et BD un diamètre.

» Je dis que ABD, BCD sont des semi-paraboles.

(¹) *Quadratura parabolae*. Éd. 1606, pp. 2 et 3; *De Centro*. Éd. 1661, pp. 243 et 244.

» Car, qu'on inscrive dans la parabole ABC une figure composée de parallélogrammes et différant de la parabole d'une grandeur moindre qu'une grandeur donnée, si petite soit-elle; (qu'on l'inscrive, dis-je), de telle sorte que deux côtés des parallélogrammes soient parallèles au diamètre BD, par exemple, FK, HL, dans le parallélogramme FHLK.

» Le côté FH de ce parallélogramme, parallèle à la base AC, étant divisé en deux parties égales au point G, par le diamètre BD, il s'en suit que le côté KL sera divisé en deux parties égales au point D; et le parallélogramme GK sera la moitié du parallélogramme KH.

» De même chacun des parallélogrammes inscrits dans la figure ABD, sera la moitié de chacun des parallélogrammes correspondants dans la parabole ABC.

» La figure totale EK inscrite dans la figure ABD, est donc la moitié de la figure totale KEL inscrite dans la parabole ABC.

» Or, chacune des deux figures inscrites diffère de celle qui lui est circonscrite de moins qu'une quantité donnée si petite soit-elle.

» Donc, d'après la proposition III du livre II du *Centre de gravité des solides* (¹), la figure ABD est la moitié de la parabole ABC. Donc le diamètre ABC divise la parabole en deux parties équivalentes. Ce qu'il fallait démontrer. »

En résumé, sans parler de l'habileté de Valerio comme analyste, ni de sa virtuosité dans la transformation des proportions, on remarquera le caractère déjà très moderne de plusieurs de ses démonstrations et leur grande rigueur.

A ce dernier point de vue, il ne faut pas l'oublier, un géomètre des premières années du XVIIᵉ siècle ne raisonne pas sur des nombres, comme nous, mais sur des figures géométriques. Valerio a rigoureusement démontré que la différence entre les figures inscrites et circonscrites aux *surfaces et aux volumes déficients d'un même côté* devient inférieure à une quantité arbitrairement petite; disons : tend vers zéro. Il regarde comme oiseux de dire et de démontrer, qu'il en est a fortiori de même de la dif-

(¹) C'est le théorème sur la limite d'un rapport, donné au § III, ci-dessus.

férence entre la figure courbe elle-même et la figure qui lui est inscrite ou circonscrite; mais, il agit comme si c'était chose faite. Nous l'avons vu dans les exemples ci-dessus. Grégoire de Saint-Vincent comblera un jour cette lacune.

En outre, il faut remarquer, chez Valerio, un énoncé correct et général du théorème relatif à la limite du quotient de deux variables; théorème auquel il manque encore la terminologie moderne, mais que l'auteur applique déjà avec une rare élégance.

Et maintenant quelle a été l'influence de Valerio sur Cavalieri et Saint-Vincent?

Cavalieri, dans sa préface, nomme Valerio parmi les auteurs dont il s'est inspiré. Il faut bien le croire. La méthode des indivisibles du Milanais lui est cependant très personnelle et nullement empruntée à la méthode des limites de son compatriote. Cavalieri a plutôt admiré, chez Valerio, les artifices du calculateur et de l'analyste.

Quant à Saint-Vincent, l'exemplaire de l'édition de 1604 du traité des *Centres de gravité*, appartenant à l'Université de Louvain, dont je me suis servi, a au titre l'inscription manuscrite : « Soc(ieta)tis Jesu, Gandavi, M. 7. 1619. » M. 7 est une cote du classement de l'ouvrage dans les rayons de la bibliothèque; 1619 nous donne la date de l'acquisition du volume; c'était une indication, alors de tradition, chez beaucoup de bibliothécaires des collèges de la Compagnie de Jésus. Pendant son long séjour à Gand, Grégoire eut donc sous la main l'exemplaire même, qui est possédé aujourd'hui par l'Université de Louvain. Voilà un fait qu'il ne faut pas perdre de vue, quand on compare les méthodes de Saint-Vincent, telles qu'il les expose dans les mémoires de 1625 rédigés pour Grienberger, avec les perfectionnements qu'il leur donna plus tard, dans le *Problema Austriacum*.

LES
FAUX ÉQUILIBRES CHIMIQUES
ET LA
THERMODYNAMIQUE CLASSIQUE

PAR

E. ARIÈS

CHAPITRE PREMIER

ÉQUILIBRE ET REPOS CHIMIQUES

1. *Les travaux de M. P. Duhem sur la Mécanique chimique et la Doctrine des faux équilibres.* — Il serait superflu d'insister sur la légitime autorité dont jouit dans le monde scientifique M. P. Duhem, qui a enrichi notre littérature française de tant d'ouvrages originaux. Les applications de la thermodynamique aux phénomènes chimiques ont été notamment, de sa part, l'objet d'une ample série de publications, et la science nouvelle qu'on appelle la mécanique chimique, lui doit de nombreux travaux justement estimés.

Si le savant Professeur de l'Université de Bordeaux a beaucoup écrit, il a aussi beaucoup lu, et l'on reste étonné de la puissance d'assimilation qui lui a permis de joindre à ses théories des exemples puisés dans les recherches des grands chimistes de tous les pays. Aussi, ses écrits ont-ils pénétré partout, et sont-ils consultés par tous ceux, à l'étranger comme en France, qui ont le souci de suivre les progrès sans cesse grandissants de la chimie contempo-